Apuntes

Gestión Electrónica de la Energía Eléctrica

Tema 2 – Modelado y estabilidad

Máster Universitario en Ingeniería de la Energía

ETSI Minas y Energía

Hugo Torres Orejudo

Noviembre 2026

Elaborado con IA a partir del material de la asignatura. Material no oficial.

Índice general

1 Por qué conmutar: del regulador lineal al convertidor reductor 2
1.1 El regulador lineal es un divisor que quema energía . . . 2
1.2 El interruptor ideal: valor medio y ciclo de trabajo . . . 2
1.3 El filtro LC y dónde poner su frecuencia . . . 3

2 Modelo promediado y de pequeña señal del reductor 5
2.1 Linealizar: Taylor en el punto de trabajo . . . 5
2.2 Modulación PWM y superposición continua/alterna . . . 5
2.3 Deducción del modelo del reductor . . . 5
2.4 Interpretación y ejemplo . . . 6

3 Carga de potencia constante e impedancia incremental negativa 8
3.1 Impedancia incremental = pendiente de la curva $v(i)$ . . . 8
3.2 Convertidor regulado visto desde su entrada . . . 8

4 Estabilidad de sistemas en cascada: criterio de Middlebrook 9
4.1 Divisor de impedancias y "ganancia de lazo menor" . . . 9
4.2 Criterio de Middlebrook . . . 10
4.3 Margen de fase y de ganancia . . . 10

5 Filtro de entrada y amortiguamiento 11
5.1 Z_{OUT} de un filtro LC ideal . . . 11
5.2 Tres formas de amortiguar . . . 12
5.3 El peor caso y el sentido de los 6 dB . . . 14
5.4 Versión panel fotovoltaico (equivalente de Thévenin y condensador de entrada) . . . 14

6 Lazos de control: $L(s) = \omega_c/s$ y regulador PI 15
6.1 Esquema y función de transferencia en lazo cerrado . . . 15
6.2 La ganancia de lazo ideal: $L(s) = \omega_c/s$ . . . 15
6.3 Diseño de $R(s)$: el PI que cancela la planta . . . 15
6.4 Cuando el cero del PI no cancela el polo . . . 17
6.5 Plantas de dos polos y otros reguladores . . . 18

7 Rechazo de perturbaciones e impedancia de salida 18
7.1 La perturbación entra después de la planta . . . 18
7.2 Ejemplo 7.1 – lazo de tensión sobre una carga R_s–C con sumidero de corriente . . . 19
7.3 Impedancia de salida en lazo abierto y cerrado . . . 20

8 Cómo se pregunta en examen 21
8.1 Receta del ejercicio de control (los apartados salen casi siempre en este orden) . . . 21
8.2 Mini-test (respuestas al final de la línea) . . . 22

9 Formulario del Tema 2 23

Cómo usar estos apuntes

Notación del profesor: magnitud total = continua (mayúscula) + perturbación (tilde), $d = D + \tilde{d}$, $v_o = V_o + \tilde{v}_o$. $R(s)$ es el *regulador*, $G(s)$ la *planta* y $L(s) = R(s)G(s)$ la *ganancia de lazo*; se distinguen de la inductancia L y de la resistencia R por el argumento (s). $\omega_c = 2\pi f_c$ es el cruce por 0 dB (=ancho de banda). Z_{OUT} es la impedancia de salida de la etapa que alimenta y Z_{IN} la de entrada de la etapa alimentada.
Cajas: **Idea clave** (lo que hay que saber), **[REVISAR]** (errores o ambigüedades del material de curso, corregidos aquí), **Complemento estándar** (no está en las transparencias; útil pero opcional). Todos los números de ejemplos están recalculados en Python (`T2/calc_*.py`); "asint." indica valor de Bode asintótico y "exacto" el de la función completa.
Dos bloques de examen: **(i)** control (secciones 2, 6, 7) y **(ii)** estabilidad con $Z_{IN} < 0$ (secciones 3, 4, 5); la sección 8 da las recetas.

1 Por qué conmutar: del regulador lineal al convertidor reductor

1.1 El regulador lineal es un divisor que quema energía

Para pasar de V_{in} a $V_o < V_{in}$ se puede poner una resistencia variable (o un transistor en zona lineal) en serie con la carga. Con la misma corriente I en entrada y salida,

$$\eta = \frac{P_o}{P_e} = \frac{V_o I}{V_{in} I} = \frac{V_o}{V_{in}}, \qquad P_d = (V_{in} - V_o) I.$$

Ejemplos del curso: $12 \to 5\,\text{V}$ da $\eta = 41{,}6\,\%$; una batería de 14 V a 3,3 V para un microprocesador da $\eta \approx 24\,\%$. Con nuestros datos ($V_{in} = 24\,\text{V}$, $V_o = 6\,\text{V}$, $I_o = 2\,\text{A}$): $\eta = 25\,\%$ y $P_d = 36\,\text{W}$ para entregar 12 W. Además la salida es difícil de regular (depende de R y de V_{in}) y el elemento disipador necesita refrigeración: sólo sirve para potencias muy pequeñas.

1.2 El interruptor ideal: valor medio y ciclo de trabajo

Si los transistores trabajan *en corte y saturación*, no disipan (idealmente): $P_d = 0$ y $\eta = 100\,\%$. El reductor (*buck*) usa dos interruptores complementarios: s_1 (serie, gobernado por la puerta g) y s_2 (a masa, gobernado por $1 - g$).

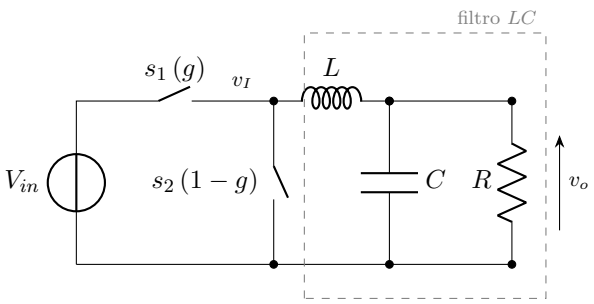


Figura 1. Reductor ideal: $g = 1$ cierra s_1 y abre s_2 ($v_I = V_{in}$); $g = 0$ hace lo contrario ($v_I = 0$). El filtro LC extrae el valor medio.

Con periodo $T = t_{on} + t_{off}$, frecuencia $f_{sw} = 1/T$ y ciclo de trabajo $d = t_{on}/T$, el valor medio de la tensión conmutada v_I es

$$\bar{v}_I = \frac{1}{T}\int_0^T v_I\,dt = \frac{1}{T}\left(V_{in}t_{on} + 0\cdot t_{off}\right) = \underline{d\,V_{in}}\,.$$

Variando d se controla el valor medio de la salida: *d es la variable de control.*

1.3 El filtro LC y dónde poner su frecuencia

Una RC disiparía; una bobina serie y un condensador paralelo no (idealmente). Con la carga R en paralelo con C ($Z_p = \frac{R}{1+sRC}$):

$$\frac{v_o}{v_I} = \frac{Z_p}{Z_p + sL} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Bode: 0 dB hasta ω_0, pico de altura $\approx Q$ en ω_0 y después -40 dB/dec; la fase cae de 0° a $-180°$ (rampa de $\omega_0/10$ a $10\omega_0$). Sin resistencia ($Q \to \infty$) el pico es infinito.

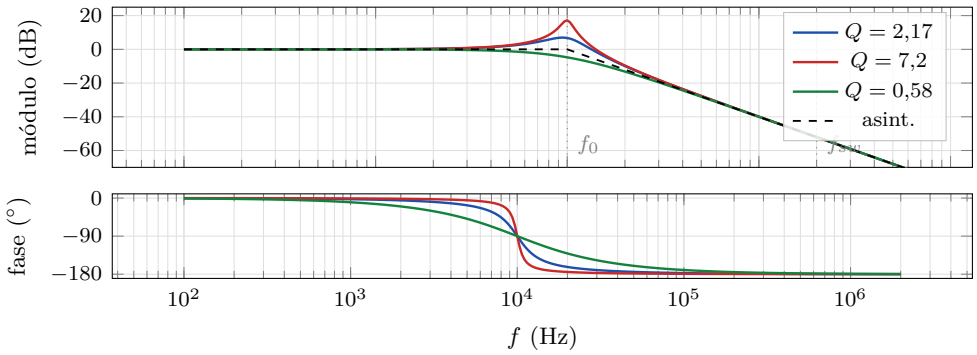


Figura 2. v_o/v_I del filtro con $L = 22\,\mu$H, $C = 11{,}5\,\mu$F ($f_0 = 10$ kHz) y tres cargas R (3, 10 y 0,8 Ω).

Idea clave

Regla de diseño: $f_0 \ll f_{sw}$. Una década por encima de f_0 el filtro atenúa 40 dB: con $f_{sw} = 10f_0$ el primer armónico del pulso se divide por ≈ 100; con $f_{sw} = 100f_0$, por 10^4 (-80 dB). Menor f_0 atenúa más pero exige L y C mayores (y limita el ancho de banda del lazo, sección 6).

Ejemplo 1.1 – diseño del filtro de un reductor $24 \to 6$ V, 2 A

$V_{in} = 24\,\text{V}$, $V_o = 6\,\text{V}$, $R = V_o/I_o = 3\,\Omega$, $f_{sw} = 200\,\text{kHz}$, $L = 22\,\mu\text{H}$, $\eta = 94\,\%$.
Ciclo de trabajo y potencias:

$$D = \frac{V_o}{V_{in}} = 0{,}25 \qquad P_o = 12\,\text{W}$$

$$P_{in} = \frac{P_o}{\eta} = 12{,}77\,\text{W}$$

$$P_{perd} = 0{,}77\,\text{W} \qquad \text{(frente a 36 W del lineal)}$$

Elegimos $f_0 = f_{sw}/20 = 10\,\text{kHz}$:

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = 11{,}5\,\mu\text{F} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 2{,}17$$

Fundamental del pulso (serie de Fourier):

$$A_1 = \frac{2V_{in}\sin(\pi D)}{\pi} = 10{,}80\,\text{V}$$

Atenuación del filtro a f_{sw}: exacta $|H(j2\pi f_{sw})| = -52{,}02\,\text{dB}$ (asint. $-40\log 20 = -52{,}04\,\text{dB}$). Por tanto:

$$\hat{v}_{rizado} = 27{,}1\,\text{mV}$$

$$\Delta v_{pp} = \underline{54{,}1\,\text{mV pico a pico}}$$

Complemento estándar (fuera del material del profesor)

Rizado exacto en régimen permanente (modo continuo): la corriente de la bobina es un triángulo de amplitud pico a pico $\Delta i_L = \dfrac{(V_{in}-V_o)D}{L f_{sw}} = 1{,}02\,\text{A}$ y la tensión de salida, una parábola con $\Delta v_o = \dfrac{\Delta i_L}{8 C f_{sw}} = \dfrac{V_{in} D(1-D)}{8LCf_{sw}^2} = 55{,}5\,\text{mV}$ (0,93 % de V_o). La estimación con el primer armónico da 54,1 mV: sólo 2,5 % de diferencia, suficiente para un examen.

Errores típicos

- Decir que el lineal "regula mejor" sin dar η: lo relevante es $\eta_{lin} = V_o/V_{in}$ frente a $\approx 90\,\%$ del conmutado.
- Confundir f_{sw} con f_0 o poner f_0 por encima de f_{sw}: el filtro no atenuaría el rizado.
- Olvidar que $d = t_{on}/T$ da el valor *medio*: la salida no es V_{in} ni 0.

2 Modelo promediado y de pequeña señal del reductor

2.1 Linealizar: Taylor en el punto de trabajo

Una función no lineal se sustituye, cerca del punto de operación A, por su recta (o plano) tangente:

$$f(x) \approx f(x_A) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A \tilde{x}, \qquad f(x,y) \approx f(x_A,y_A) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A \tilde{x} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A \tilde{y}.$$

La parte continua es $f(x_A, y_A)$ y la de *pequeña señal* son los términos con tilde. Ejemplo: $v = 3i^2 \Rightarrow V + \tilde{v} = 3I^2 + 6I\,\tilde{\imath}$, es decir $V = 3I^2$ y $\tilde{v} = 6I\,\tilde{\imath}$ (pendiente de la tangente). Si la perturbación es grande el error crece: el modelo sólo vale para *pequeñas señales*.

2.2 Modulación PWM y superposición continua/alterna

Un comparador enfrenta una rampa de periodo T con el nivel de control: si el nivel está por encima de la rampa el interruptor serie conduce. Al nivel continuo D se superpone una señal lenta $\tilde{d}$: $d = D + \tilde{d}$; el ciclo de trabajo cambia de un periodo a otro y su valor medio sigue a la señal de control. Por eso se barre la frecuencia de $\tilde{d}$ (mucho menor que f_{sw}) para obtener respuestas en frecuencia. Como el sistema es (aprox.) lineal en torno al punto de operación, se aplica **superposición**: en continua ($\tilde{d} = 0$) la bobina es un cortocircuito y el condensador un circuito abierto; en alterna se anulan las fuentes continuas y se trabaja con transformada de Laplace.

2.3 Deducción del modelo del reductor

Valores medios en un periodo (modo continuo, interruptores ideales, fuente v_g):

$$L\frac{di_L}{dt} = d\,v_g - v_o, \qquad C\frac{dv_o}{dt} = i_L - \frac{v_o}{R} - i_o.$$

Sustituimos $d = D + \tilde{d}$, $v_g = V_g + \tilde{v}_g$, $i_L = I_L + \tilde{\imath}_L$, $v_o = V_o + \tilde{v}_o$ y separamos.

Continua (derivadas nulas): $V_o = DV_g$, $I_L = V_o/R$, $I_g = DI_L$.

Pequeña señal (se desprecia el producto $\tilde{d}\,\tilde{v}_g$ de dos perturbaciones):

$$L\frac{d\tilde{\imath}_L}{dt} = D\tilde{v}_g + V_g\tilde{d} - \tilde{v}_o, \qquad C\frac{d\tilde{v}_o}{dt} = \tilde{\imath}_L - \frac{\tilde{v}_o}{R} - \tilde{\imath}_o.$$

Con $s = d/dt$ y despejando ($\tilde{v}_g = \tilde{\imath}_o = 0$):

$$\boxed{G_{vd}(s) = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{d}} = \frac{V_g}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$ (únicamente la fuente $\tilde{d}V_g$ en serie con L, $C \,\|\, R$).

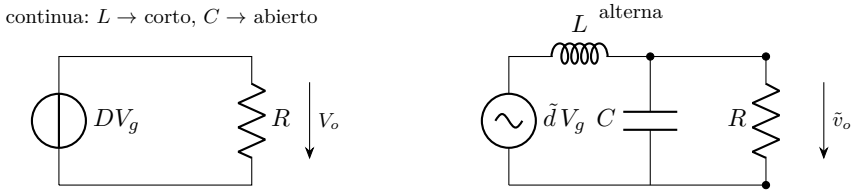


Figura 3. Superposición en el reductor: circuito de continua (punto de operación) y de pequeña señal (fuente controlada $\tilde{d}V_g$).

Modelo de pequeña señal del reductor (carga R en paralelo con C)

$$G_{vd} = \frac{V_g}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$G_{vd}(0) = V_g, \qquad |G_{vd}(j\omega_0)| = QV_g, \qquad \angle G_{vd}(j\omega_0) = -90^\circ.$$

$$G_{vg} = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{v}_g} = \frac{D}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \qquad Z_{out,OL} = \left.\frac{\tilde{v}_o}{-\tilde{i}_o}\right|_{\tilde{d}=0} = \frac{sL}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}.$$

$Z_{out,OL} = L \parallel C \parallel R$ y $|Z_{out}(j\omega_0)| = R$.

Nota. G_{vg} y la expresión con R de Z_{out} salen de las mismas ecuaciones; las transparencias sólo escriben G_{vd} y $Z_{out} = \frac{sL}{s^2LC+1}$ (sin R, que da el pico infinito).

2.4 Interpretación y ejemplo

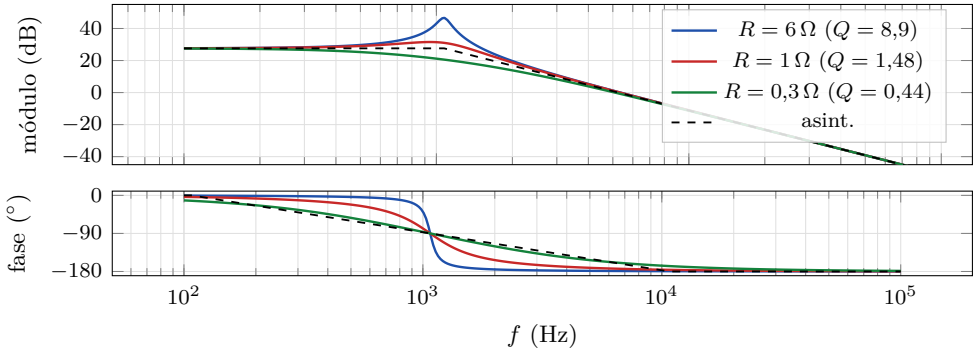


Figura 4. $G_{vd}(j\omega)$ para $V_g = 24\,\text{V}$, $L = 100\,\mu\text{H}$, $C = 220\,\mu\text{F}$ ($f_0 = 1{,}073\,\text{kHz}$). Al bajar R el pico desaparece ($Q < 0{,}5$: dos polos reales).

Ejemplo 2.1 – G_{vd} de un reductor $24 \to 12$ V

$V_g = 24\,\text{V}$, $D = 0{,}5$, $R = 6\,\Omega$, $L = 100\,\mu\text{H}$, $C = 220\,\mu\text{F}$.

Punto de operación:

$$V_o = 12\,\text{V}$$
$$I_o = 2\,\text{A}$$

Parámetros del filtro:

$$f_0 = 1{,}073\,\text{kHz}$$
$$Q = 8{,}90$$
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 0{,}674\,\Omega$$

Ganancias:

$$G_{vd}(0) = 24\ (27{,}6\,\text{dB})$$
$$|G_{vd}(j\omega_0)| = QV_g = 213{,}6\ (46{,}59\,\text{dB})$$
$$|G_{vd}|_{max} = 213{,}9\ (46{,}61\,\text{dB},\ \text{a } 1{,}070\,\text{kHz})$$
$$G_{vg}(0) = D = -6\,\text{dB} \qquad |Z_{out}(j\omega_0)| = R = 6\,\Omega$$

Errores típicos

- **Dónde está R cambia Q:** con la carga en paralelo $Q = R\sqrt{C/L}$ (a mayor R más pico); si R es una pérdida *serie* con la bobina, $G_{vd} = V_g/(LCs^2 + RCs + 1)$ y $Q = \sqrt{L/C}/R = Z_0/R$ (a mayor R menos pico). Si $Q < \frac{1}{2}$ los dos polos son reales, en $f \approx \frac{1}{2\pi RC}$ y $\frac{R}{2\pi L}$ (apartado 6.5).
- Olvidar que G_{vd} lleva el factor V_g (no D): $\tilde{v}_I = \tilde{d}\,V_g$. El factor D aparece en G_{vg}.
- Escribir $d = D \cdot \tilde{d}$ (aparece así en un apunte): debe ser $d = D + \tilde{d}$.

Complemento estándar (fuera del material del profesor)

En el *boost* y el *buck-boost*, G_{vd} incluye un cero en el semiplano derecho ($\omega_{RHP} = R(1-D)^2/L$ en el boost) que limita el ancho de banda; el reductor no lo tiene. Para su lazo de tensión (dos polos) se usa un regulador de dos ceros (sección 6.5).

3 Carga de potencia constante e impedancia incremental negativa

3.1 Impedancia incremental = pendiente de la curva $v(i)$

Para una carga no lineal definimos $Z = \tilde{v}/\tilde{\imath}$ en el punto de trabajo, es decir, la *pendiente de la tangente* de la curva $v(i)$. Una resistencia da $+R$, una fuente de tensión ideal da 0 y una de corriente ideal da ∞. Para una carga que absorbe potencia constante P:

$$V(I) = \frac{P}{I} \;\Rightarrow\; V \approx \frac{P}{I_A} - \frac{P}{I_A^2}\tilde{\imath} \;\Rightarrow\; \tilde{v} = -\frac{P}{I_A^2}\tilde{\imath} = -\frac{V_A I_A}{I_A^2}\tilde{\imath} = -\frac{V_A}{I_A}\tilde{\imath}.$$

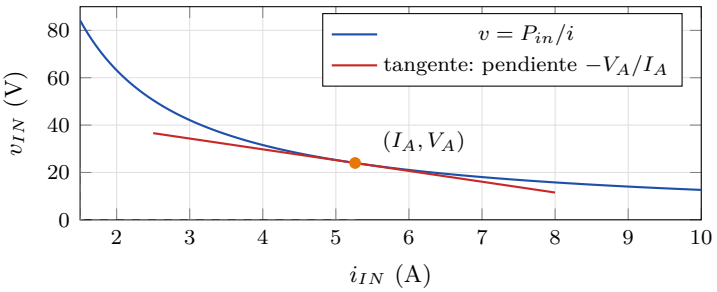


Figura 5. Hipérbola de potencia constante ($P_{in} = 126{,}3\,\text{W}$) y su tangente en ($5{,}26\,\text{A}, 24\,\text{V}$): pendiente $-4{,}56\,\Omega$.

3.2 Convertidor regulado visto desde su entrada

Si el convertidor regula su salida (lazo cerrado), entrega P_o constante a la carga aunque cambie V_{IN}: si v_{IN} sube, el lazo reduce d y la corriente de entrada baja. Con rendimiento η,

$$P_{IN} = v_{IN} i_{IN} = \frac{P_o}{\eta} = k \;\Rightarrow\; v_{IN} = \frac{k}{i_{IN}} \;\Rightarrow\; \underline{Z_{IN} = \frac{\tilde{v}_{IN}}{\tilde{\imath}_{IN}} = -\frac{k}{I_{IN}^2} = -\frac{V_{IN}}{I_{IN}} = -\frac{V_{IN}^2}{P_{IN}}}$$

Es una **resistencia negativa**: $|Z_{IN}|$ es plano en frecuencia (hasta el ancho de banda del lazo del convertidor) y su fase es 180° (en los Bode sólo se dibuja el módulo).

Ejemplo 3.1

Batería de $V_{IN} = 24\,\text{V}$ y convertidor regulado con $P_o = 120\,\text{W}$, $\eta = 95\,\%$.

$$P_{IN} = 126{,}3\,\text{W} \qquad I_{IN} = 5{,}26\,\text{A}$$

$$Z_{IN} = -\frac{V_{IN}^2}{P_{IN}} = \underline{-4{,}56\,\Omega} \qquad (|Z_{IN}| = 13{,}18\,\text{dB}\Omega)$$

Si v_{IN} sube $2{,}4\,\text{V}$ ($+10\,\%$), el modelo lineal predice:

$$\tilde{\imath}_{IN} = -\frac{2{,}4}{4{,}56} = -0{,}526\,\text{A}$$

La hipérbola exacta da $-0{,}478\,\text{A}$ (error $10\,\%$: crece con la perturbación).

Otras curvas de entrada ⇒ otras Z_{IN} (preguntas típicas de PEC/examen)

Convertidor que mantiene v_{IN} constante	$Z_{IN} = \partial v/\partial i = 0$
Convertidor que mantiene i_{IN} constante	$Z_{IN} = \infty$
Curva lineal $v_{IN} = a\, i_{IN} - b$ (emulador resistivo, $a > 0$)	$Z_{IN} = a$ (positiva)
Curva $v_{IN} = k\, i_{IN}^2$	$Z_{IN} = 2k\, I_{IN}$ (positiva)
Potencia constante	$Z_{IN} = -V_{IN}^2/P_{IN}$ (negativa)

Revisar

En un apunte manuscrito aparece la anotación "$V_{IN} = V_{BAT} - i_{IN} R_k$" junto al desarrollo de Z_{IN}; es ilegible y no se usa en ningún resultado (podría ser la caída en la resistencia de línea). Tampoco debe confundirse $Z_{IN} = -V^2/P$ (impedancia *incremental*) con la impedancia estática $+V/I = +V^2/P$ que ve la fuente en continua.

Errores típicos

- Poner $Z_{IN} = +V^2/P$: el signo negativo es la causa de la inestabilidad en cascada (sección 4). Al comparar con Z_{OUT} se usa $|Z_{IN}|$ (y se recuerda el 180°).
- Usar P_o en lugar de $P_{IN} = P_o/\eta$ (error de $1/\eta$ en Z_{IN}).
- Aplicar $Z_{IN} = -V^2/P$ sin lazo cerrado de regulación: un convertidor *en lazo abierto* se comporta de forma resistiva ($Z_{IN} > 0$).
- El *peor caso* es la potencia máxima (menor $|Z_{IN}|$).

4 Estabilidad de sistemas en cascada: criterio de Middlebrook

4.1 Divisor de impedancias y "ganancia de lazo menor"

Sea una etapa fuente (batería, panel, filtro EMI) con impedancia de salida Z_{OUT} que alimenta una etapa carga con Z_{IN}:

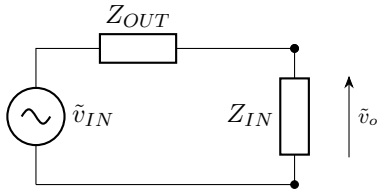


Figura 6. Equivalente de pequeña señal de dos etapas en cascada.

$$\frac{\tilde{v}_o}{\tilde{v}_{IN}} = \frac{Z_{IN}}{Z_{IN} + Z_{OUT}} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_{OUT}}{Z_{IN}}}.$$

Es la misma forma que $\frac{1}{1+L(s)}$ de un lazo cerrado, con la "ganancia de lazo" $T_m(s) = Z_{OUT}/Z_{IN}$. El sistema se hace inestable cuando $T_m = -1$ (0 dB y fase −180°). Con $Z_{IN} < 0$ (carga

de potencia constante) basta con que Z_{OUT} sea real y positiva y alcance a $|Z_{IN}|$ en alguna frecuencia: p.ej. en la resonancia de un filtro.

4.2 Criterio de Middlebrook

Criterio de Middlebrook (suficiente y conservador)

$$\left|\frac{Z_{OUT}}{Z_{IN}}\right| < \frac{1}{2} \quad \forall f \quad \Longleftrightarrow \quad |Z_{OUT}|_{dB} < |Z_{IN}|_{dB} - 6\,\text{dB} \quad \forall f.$$

Origen del $\frac{1}{2}$. Si $|T_m| < \frac{1}{2}$, entonces $|1 + T_m| \geq 1 - |T_m| > \frac{1}{2}$, de modo que $\left|\tilde{v}_o/\tilde{v}_{IN}\right| < 2$: la etapa carga nunca amplifica más de 6 dB las perturbaciones de la fuente, y la curva $T_m(j\omega)$ nunca entra en el círculo de radio $\frac{1}{2}$ alrededor del origen, es decir, queda siempre a distancia $> \frac{1}{2}$ del punto crítico -1. Es un criterio *sólo de módulo* (ignora la fase): por eso es suficiente pero no necesario.

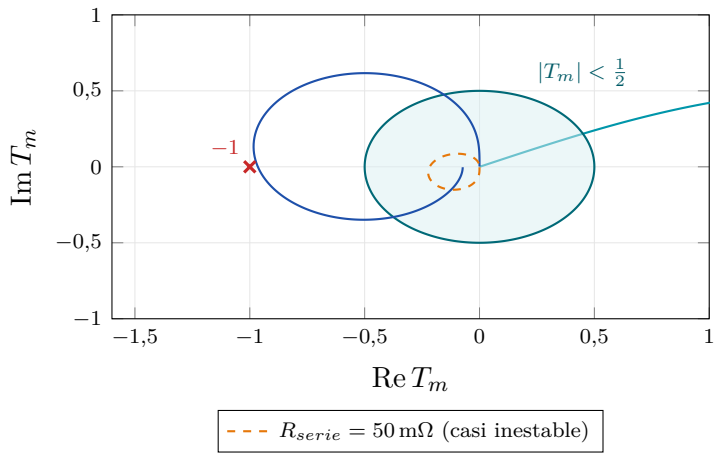


Figura 7. Plano de $T_m = Z_{OUT}/Z_{IN}$ para el filtro del ejemplo 5.1 con $Z_{IN} = -0{,}684\,\Omega$: sin amortiguar bien la curva pasa casi por -1; con la rama R_d–C_d queda dentro del círculo de radio $\frac{1}{2}$ (Middlebrook).

4.3 Margen de fase y de ganancia

Alternativa menos conservadora (pero que exige módulo *y* fase), válida tanto para $T_m = Z_{OUT}/Z_{IN}$ como para una ganancia de lazo $L(s)$:

- **Margen de fase (MF):** $180° + \angle T(j\omega_c)$, donde $|T(j\omega_c)| = 0\,\text{dB}$ (ω_c = frecuencia de cruce).
- **Margen de ganancia (MG):** $-|T(j\omega_{180})|_{dB}$, donde $\angle T(j\omega_{180}) = -180°$. Si la fase nunca llega a $-180°$, MG $= \infty$.

Regla práctica: cruzar 0 dB con pendiente $-20\,\text{dB/dec}$ da MF holgado; cruzar con $-40\,\text{dB/dec}$ es inestable o marginal. Lectura asintótica (fase en rampas de $-45°$/dec entre $f_b/10$ y $10f_b$ por cada polo f_b):

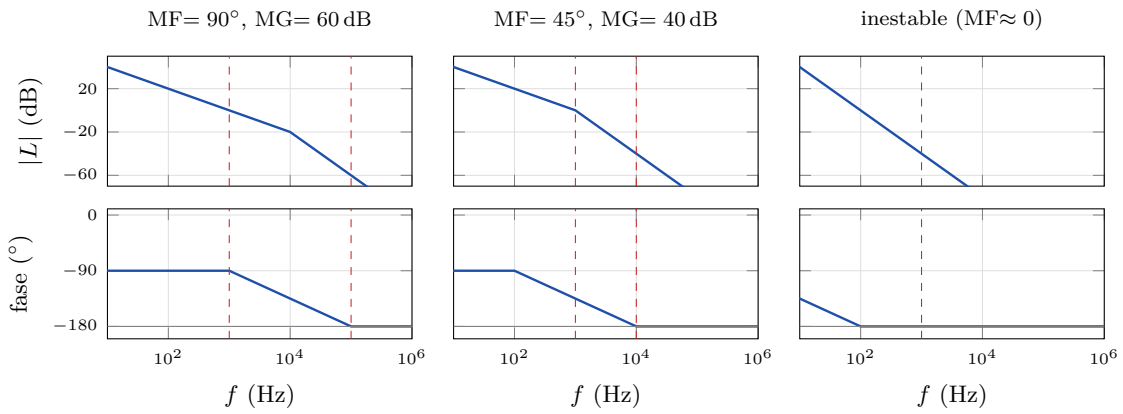


Figura 8. Tres casos asintóticos con cruce en 1 kHz: segundo polo una década por encima del cruce (MF= 90°; la fase llega a −180° a 100 kHz con −60 dB), en el cruce (MF= 45°, −180° a 10 kHz con −40 dB) y dos polos por debajo (cruce con −40 dB/dec).

5 Filtro de entrada y amortiguamiento

5.1 Z_{OUT} de un filtro LC ideal

Un filtro EMI de entrada (L serie, C paralelo) alimenta un convertidor de $Z_{IN} = -V^2/P_{IN}$. Cortocircuitando la fuente, desde el convertidor se ve $L \parallel C$:

$$Z_{OUT} = sL \parallel \frac{1}{sC} = \frac{sL}{LCs^2+1}, \qquad |Z_{OUT}(j\omega)| = \frac{\omega L}{|1-LC\omega^2|}, \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Bode asintótico: en paralelo domina la impedancia menor: sigue ωL (+20 dB/dec) hasta ω_r y $1/\omega C$ (−20 dB/dec) después, con forma de "Λ" y pico *infinito* en ω_r (las asíntotas se cruzan en Z_0). Con una pérdida pequeña el pico es finito pero enorme: $\approx L/(CR_p)$ para una resistencia serie R_p.
Middlebrook: $|Z_{IN}|$ es una recta horizontal y el límite es $|Z_{IN}| - 6$ dB. Como el pico supera cualquier recta, el filtro sin amortiguar **no cumple** (inestable) para cualquier P.

Ejemplo 5.1 – convertidor de 200 W a 12 V con filtro $L = 3{,}3\,\mu$H, $C = 100\,\mu$F

$\eta = 95\,\%$.

$$P_{IN} = 210{,}5\,\text{W} \qquad I_{IN} = 17{,}5\,\text{A}$$

$$|Z_{IN}| = \frac{V^2}{P_{IN}} = 0{,}684\,\Omega\ (-3{,}30\,\text{dB}\Omega)$$

$$\frac{|Z_{IN}|}{2} = \underline{0{,}342\,\Omega}\ (-9{,}32\,\text{dB}\Omega)$$

Filtro:

$$Z_0 = 0{,}182\,\Omega\ (-14{,}81\,\text{dB}\Omega) \qquad f_r = 8{,}76\,\text{kHz}$$

Sin amortiguar el pico es $\infty \Rightarrow$ no cumple.

5.2 Tres formas de amortiguar

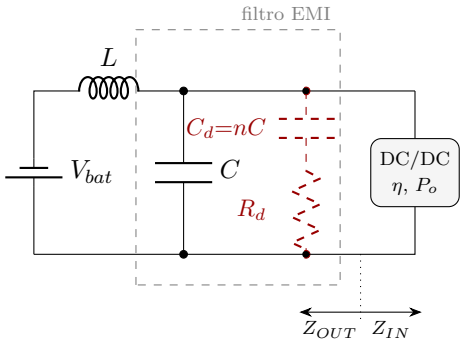


Figura 9. Filtro EMI con rama de amortiguamiento R_d–C_d (trazos rojos) en paralelo con C: el condensador serie bloquea la continua, así que R_d no disipa potencia de régimen permanente.

(a) **Resistencia en serie con L** ($R_p \approx Z_0$ acota el pico). Funciona, pero *disipa* $R_p I_{IN}^2$ y reduce la tensión de entrada del convertidor. Ejemplo 5.1: con $R_p = Z_0 = 0{,}182\,\Omega$ el pico exacto es $0{,}267\,\Omega < 0{,}342$ (cumple), pero las pérdidas son 55,9 W (28 % de P_o): inaceptable. Con $R_p = 50\,\text{m}\Omega$ el pico es $0{,}685\,\Omega$: no cumple.

(b) **Rama R_d–C_d en paralelo con C** (la del profesor, $C_d = 10C$). No afecta en continua. En la resonancia domina la rama C_d–R_d y $|Z_{OUT}|$ queda limitado a $\approx R_d$.

(c) **Un condensador grande en la entrada** (práctica en paneles FV): baja $|Z_{OUT}|$ en alta frecuencia, pero atención a la resonancia con la inductancia de la línea (sección 5.4).

Complemento estándar (fuera del material del profesor)

Con $n = C_d/C$, el valor de R_d que minimiza el pico de $|Z_{OUT}|$ (Erickson) y el pico resultante son

$$R_d = Z_0\sqrt{\frac{(2+n)(4+3n)}{2n^2(4+n)}}, \qquad \max|Z_{OUT}| = Z_0\frac{\sqrt{2(2+n)}}{n}.$$

Ambas fórmulas están verificadas numéricamente. Valores:

n	1	2	4	10
R_d/Z_0	1,449	0,913	0,612	0,382
$\max\|Z_{OUT}\|/Z_0$	2,449	1,414	0,866	0,490

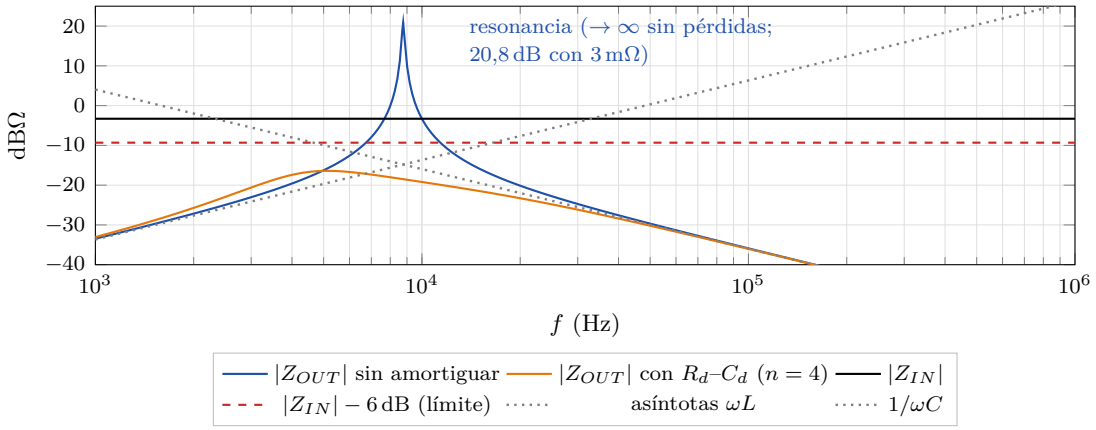


Figura 10. Ejemplo 5.1. El pico de $|Z_{OUT}|$ viola el límite; con $R_d = 0{,}111\,\Omega$ y $C_d = 400\,\mu\text{F}$ queda por debajo ($-16{,}1$ dBΩ a $-9{,}3$ dBΩ). Curvas exactas (con 3 mΩ de ESR para poder dibujar el pico sin amortiguar).

Ejemplo 5.1 (cont.) – diseño de la rama R_d–C_d

Hace falta $\max|Z_{OUT}| < 0{,}342\,\Omega = 1{,}88Z_0$: de $Z_0\sqrt{2(2+n)}/n < 0{,}342$ sale $n > 1{,}38$. Con $n = 4$:

$$C_d = 400\,\mu\text{F} \qquad R_d = 0{,}111\,\Omega$$

$$|Z_{OUT}|_{pico} = 0{,}157\,\Omega$$

$$\text{holgura} = 20\log\frac{0{,}342}{0{,}157} = \underline{6{,}7\,\text{dB}}$$

- Con $n = 1$ el pico ($0{,}445\,\Omega$) no cumple ($-2{,}3$ dB).
- Con $n = 2$ cumple por poco ($+2{,}5$ dB).
- Con $n = 10$ (el del profesor) $R_d = 69\,\text{m}\Omega$ y el pico es 89 mΩ.

5.3 El peor caso y el sentido de los 6 dB

$|Z_{IN}| = V^2\eta/P_o$ es mínimo con la *potencia máxima*: es el caso a comprobar. A potencias bajas $|Z_{IN}|$ crece y el criterio se relaja. Si el convertidor tiene un lazo lento, $Z_{IN} \approx -V^2/P$ sólo vale por debajo del ancho de banda de ese lazo.

5.4 Versión panel fotovoltaico (equivalente de Thévenin y condensador de entrada)

El mismo esquema aparece con un panel como fuente (tema 4): en la zona de caída ($V > V_1$) el panel es V_{oc} en serie con $R_{Th} = \dfrac{V_{oc} - V_1}{I_1}$ (*modo tensión*), y en la zona horizontal es I_{sc} con $R_N = \dfrac{V_1}{I_{sc} - I_1}$ en paralelo (*modo corriente*). Z_{OUT} es entonces R_{Th} (o R_N) combinada con las impedancias del cableado/filtro. La impedancia de entrada depende de la curva del convertidor:

Convertidor regula	$Z_{IN} = \partial v_{IN}/\partial i_{IN}$	Middlebrook
tensión de entrada constante	0	imposible de cumplir
corriente de entrada constante	∞	siempre se cumple
potencia constante	$-V^2/P_{IN}$	hay que comprobarlo
curva $v = ai - b$ $(a > 0)$	$+a$	se comprueba con $a/2$

Si no se cumple se añade un condensador C_p en la entrada. **Cuidado:** fijar C_p sólo igualando $1/(\omega C_p)$ al límite en la frecuencia donde $|Z_{OUT}|$ lo cruza ignora la resonancia L–C_p; si Z_{OUT} de baja frecuencia es pequeña ($R_{Th} \ll Z_0$, factor de calidad $Q = Z_0/R_{Th} \gg 1$) el pico es $\approx L/(R_{Th}C_p)$ y hay que exigir

$$C_p \gtrsim \frac{L}{R_{Th}\,|Z_{IN}|/2} \quad (Q \gg 1), \text{ y comprobar el pico exacto después.}$$

Revisar

En la solución oficial de la PEC 2024/25 el valor de C_p aparece como 96,5 µF cuando la expresión $C_p = 1/(2\pi \cdot 40{,}6\,\text{kHz} \cdot 4{,}06\,\Omega)$ da $\approx 0{,}965\,\mu\text{F}$; y además, al colocar C_p justo en el cruce, aparece resonancia L–C_p (el valor resultante es pequeño para amortiguarla). Conviene tomar un C_p mayor y verificar con el pico. En el ejercicio E de la hoja de problemas se ve un caso numérico en el que la regla de las asíntotas falla por un factor > 10.

Errores típicos

- Comparar Z_{OUT} con Z_{IN} en lugar de con $|Z_{IN}|/2$ (olvidar los 6 dB).
- Dibujar $|Z_{OUT}|$ del filtro como ωL *solo* o como $1/\omega C$ *solo*: es el mínimo de ambas (paralelo) y la "Λ" tiene el pico en ω_r.
- Amortiguar con una R en serie con L sin calcular las pérdidas $R\,I^2$.
- En modo tensión del panel, no sumar R_{Th} a Z_{OUT}; en modo corriente, no olvidar que R_N queda en paralelo.

6 Lazos de control: $L(s) = \omega_c/s$ y regulador PI

6.1 Esquema y función de transferencia en lazo cerrado

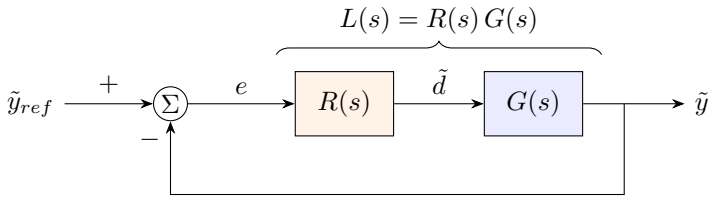


Figura 11. Lazo de realimentación unitaria: $\tilde{d}$ es la variable de control del convertidor y $\tilde{y}$ la magnitud regulada (tensión o corriente).

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_{ref} - \tilde{y})L(s) \;\Rightarrow\; \underline{\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_{ref}} = \frac{L(s)}{1+L(s)}}.$$

El sistema es inestable si $L(s) = -1$; MF y MG se miden sobre $L(s)$. **Lectura en frecuencia:** si $|L| \gg 1$, $\tilde{y}/\tilde{y}_{ref} \approx 1$ (la salida sigue a la referencia); si $|L| \ll 1$, $\tilde{y}/\tilde{y}_{ref} \approx L(s)$ (la referencia se atenúa y desfasa). La frecuencia de cruce es el **ancho de banda** $\Delta b_w = f_c$.

6.2 La ganancia de lazo ideal: $L(s) = \omega_c/s$

Como $R(s)$ se elige libremente, se impone la $L(s)$ deseada y se despeja $R(s) = L(s)/G(s)$. La mejor opción es un *integrador*: $L(s) = \omega_c/s$ tiene pendiente $-20\,\text{dB/dec}$, corta $0\,\text{dB}$ en ω_c (a elegir), fase $-90°$ constante, y por tanto $\underline{\text{MF}= 90°,\ \text{MG}= \infty}$. En lazo cerrado

$$T(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} = \frac{1}{1+s/\omega_c},$$

un sistema de primer orden: $|T(j\omega_c)| = -3{,}01\,\text{dB}$, $\angle T(j\omega_c) = -45°$; a $\omega_c/10$ vale $0{,}995\angle -5{,}7°$ y a $10\omega_c$, $0{,}0995\angle -84{,}3°$. (Complemento: respuesta a escalón $1 - e^{-\omega_c t}$, constante de tiempo $1/\omega_c$.)

6.3 Diseño de $R(s)$: el PI que cancela la planta

Para una planta de un polo $G(s) = \dfrac{G_0}{1+s/\omega_p}$,

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{\omega_c}{G_0}\,\frac{1+s/\omega_p}{s} = \underbrace{\frac{\omega_c}{G_0\omega_p}}_{K_p} + \frac{\overbrace{\omega_c/G_0}^{K_i}}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_p = \frac{\omega_c}{G_0\omega_p},\quad K_i = \frac{\omega_c}{G_0},\quad \omega_z = \frac{K_i}{K_p} = \omega_p}$$

Un **PI** (polo en el origen + cero que cancela el polo de la planta). Formas equivalentes de una misma $R(s)$: $K_p + \frac{K_i}{s} = K\left(1 + \frac{1}{Ts}\right) = K\frac{s+a}{s}$, con $K = K_p$, $T = K_p/K_i$, $a = \omega_z = 1/T$. En

$|R|_{dB} = |L|_{dB} - |G|_{dB}$: $-20\,\text{dB/dec}$ a baja frecuencia y plano a $20\log K_p$ por encima del cero; fase $-90° \to 0°$. El integrador da error estático nulo ($|R| \to \infty$ en continua).

Ejemplo 6.1 – lazo de corriente sobre una carga R–L

Fuente $\tilde{d}\,U$ con $U = 20\,\text{V}$ sobre $R = 0{,}5\,\Omega$ y $L = 40\,\mu\text{H}$.

$$G = \frac{\tilde{i}}{\tilde{d}} = \frac{U}{R + Ls} = \frac{U/R}{1 + \frac{L}{R}s}$$

Ganancia en continua y polo:

$$G_0 = \frac{U}{R} = 40 \ (32{,}0\,\text{dB})$$

$$\omega_p = \frac{R}{L} = 12\,500\,\text{rad/s} \qquad (f_p = 1{,}989\,\text{kHz})$$

Se pide $f_c = 20\,\text{kHz}$:

$$K_p = \frac{\omega_c L}{U} = 0{,}2513 \ (-12{,}0\,\text{dB})$$

$$K_i = K_p \omega_p = 3142/\text{s}$$

El cero queda en 1,989 kHz. Entonces:

$$L(s) = \frac{\omega_c L}{U}\,\frac{U}{Ls} = \frac{\omega_c}{s}$$

Verificado: $|L(j\omega)/(\omega_c/j\omega)| = 1$.

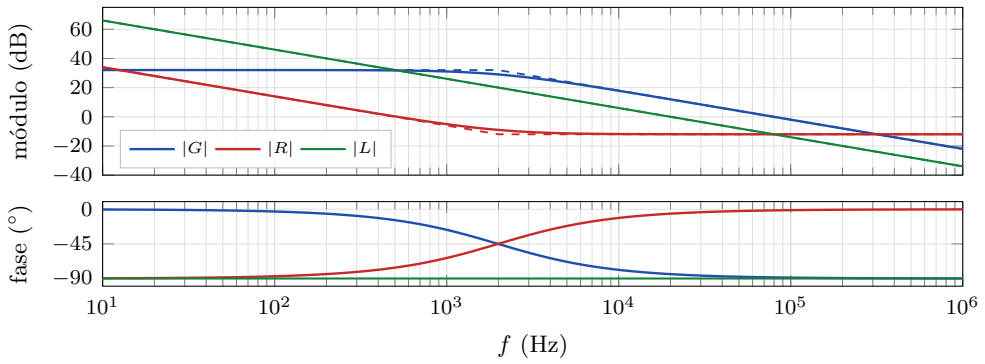


Figura 12. Ejemplo 6.1: planta G (azul), PI R (rojo) y $L = RG = \omega_c/s$ (verde); trazos: asintótico. $|R|$ es $|L| - |G|$ en dB.

Comparación con otros reguladores en la misma planta (valores exactos, calculados numéricamente):

$R(s)$	criterio	f_c exacta	MF exacto	observación
1 (P)	—	79,6 kHz	91,4°	$L(0) = 40 \Rightarrow$ error estático $1/41 = 2{,}4\,\%$
K/s ($K = 3{,}17 \cdot 10^4$/s)	$f_c = 20$ kHz	20 kHz	5,7°	cruza con -40 dB/dec
PI cancelando	$f_c = 20$ kHz	20 kHz	90°	$L = \omega_c/s$

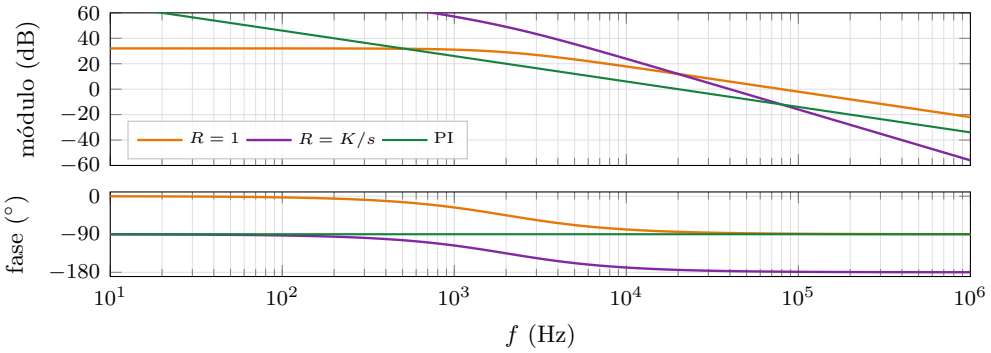


Figura 13. $L(j\omega)$ exacta para los tres reguladores de la tabla. El integrador puro cruza donde la planta ya cae a -20 dB/dec: la fase está cerca de $-180°$.

Revisar

El material del curso dice que $R = K/s$ sobre una planta de un polo es "inestable" porque cruza con -40 dB/dec. Con la planta exacta (integrador + un polo) el lazo cerrado es de 2.º orden y es *estable* siempre: MF $= 90° - \arctan(f_c/f_p) > 0$, que tiende a 0 cuando $f_c \gg f_p$ (con $f_c = 20$ kHz del ejemplo: 5,7°, respuesta muy oscilatoria). La conclusión "inestable/marginal" es la lectura asintótica; cualquier retardo extra (PWM, polos parásitos) lo hace inestable de verdad. Análogamente, un "margen de ganancia de 60 dB" leído en un Bode asintótico (donde la fase llega a $-180°$ a $10f_p$) es *infinito* en la función exacta. Responde en el examen con la lectura asintótica que pide el enunciado, y menciona la exacta si se pide "valor exacto".

6.4 Cuando el cero del PI no cancela el polo

Si el cero está en f_z distinto de f_p (p.ej. $R = K(1 + 1/Ts)$ dado), $|L|$ tiene dos tramos -20 separados por uno de -40 dB/dec entre f_p y f_z; lo normal es leer el ancho de banda y el MF en el Bode. Ejemplo con la planta anterior, $f_z = 10f_p = 19{,}9$ kHz y $K = 0{,}25$: asintóticamente $f_c = f_z$ y MF$= 180° - 90° - 45° =$ 45° (planta $-90°$, PI $-45°$); exacto: $f_c = 25{,}2$ kHz y MF $= 56{,}3°$. Para *subir el MF manteniendo el ancho de banda* se baja el cero hacia el polo (se deja K igual): MF$\to 90°$. El mismo método da el "ancho de banda máximo sin inestabilidad" pedido en algunos exámenes: la frecuencia en que la fase asintótica de L llega a $-180°$ (MF $= 0$); se consigue subiendo K (el módulo sube, la fase no cambia).

6.5 Plantas de dos polos y otros reguladores

Con $G = \dfrac{G_0}{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}$ (filtro LC con R serie, $Q < \frac{1}{2}$) se cancelan ambos polos: dos ceros más el integrador. Como un regulador con más ceros que polos no es realizable, se añaden dos polos de alta frecuencia lejos de ω_c (p.ej. a $f_{sw}/2$ o f_{sw}):

$$R(s) = \frac{\omega_c}{G_0}\,\frac{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}{s\,(1+s/\omega_h)^2} \;\Rightarrow\; L(s) = \frac{\omega_c}{s}\,\frac{1}{(1+s/\omega_h)^2}, \quad \text{MF} \approx 90^\circ - 2\arctan\frac{\omega_c}{\omega_h}.$$

(En el examen: $K\frac{(s+a)^2}{s(s+b)^2}$ con a, b elegidos.) Con $\omega_h = 10\omega_c$ el MF es 78,6° y ahora el MG es finito.

Complemento estándar (fuera del material del profesor)

Nombres habituales: P (k), I (k/s), PI, **tipo II** ($\frac{k}{s}\frac{1+s/\omega_z}{1+s/\omega_p}$, para planta de 1 polo con modo corriente) y **tipo III** (2 ceros, 2 polos, integrador; para el reductor en modo tensión con G_{vd} de polos complejos: ceros cerca de ω_0, polos hacia el cero de ESR y $f_{sw}/2$). Reglas de bolsillo: $f_c \approx f_{sw}/10$, MF $\geq 45°$–$60°$, MG $\geq$ 6–10 dB.

Errores típicos

- Poner el cero del PI *por encima* del polo de la planta (queda un tramo -40 en el cruce y se pierde MF).
- Calcular K_p con ω_c en Hz en vez de rad/s (factor 2π) o sin dividir por G_0.
- Decir que MG$=\infty$ equivale a "sin riesgo": la dinámica no modelada sigue limitando f_c ($\approx f_{sw}/10$).
- Leer MF en f_c equivocada: el cruce es donde $|L| = 1$, no donde $|G| = 1$.

7 Rechazo de perturbaciones e impedancia de salida

7.1 La perturbación entra después de la planta

Sea $\tilde{x}_1$ una perturbación (corriente de carga, tensión de batería o de entrada) que llega a la salida a través de su función de transferencia en **lazo abierto** $\left.\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\right|_{l.a.}$ (se obtiene con $\tilde{d} = 0$: la fuente controlada se anula).

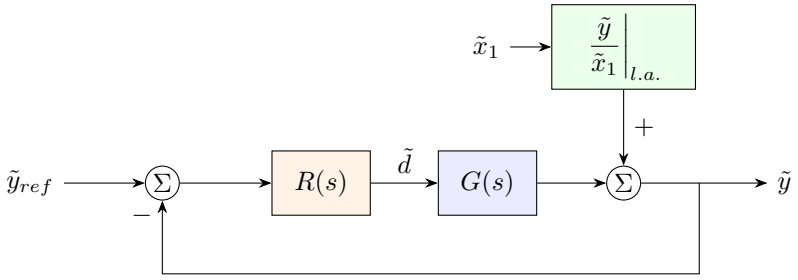


Figura 14. Diagrama de bloques con una perturbación $\tilde{x}_1$ que se suma a la salida.

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_{ref} - \tilde{y})L(s) + \tilde{x}_1 \left.\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\right|_{l.a.} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_{ref}\frac{L}{1+L} + \tilde{x}_1\frac{\tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.a.}}{1+L}.$$

Susceptibilidad en lazo cerrado ($\tilde{y}_{ref} = 0$)

$$\left.\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\right|_{l.c.} = \frac{\tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.a.}}{1+L(s)} \approx \begin{cases} \left.\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\right|_{l.a.} \Big/ L(s) & f < f_c \ (|L| \gg 1: \text{ atenuada por } L) \\ \left.\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\right|_{l.a.} & f > f_c \text{ (el lazo “no trabaja”)} \end{cases}$$

En dB: por debajo de f_c se resta $|L|_{dB}$. Con $L = \omega_c/s$ la resta es una recta de $+20\,\text{dB/dec}$: la susceptibilidad *en lazo cerrado* sube 20 dB/dec a baja frecuencia y se une a la de lazo abierto en f_c.

Un ancho de banda mayor rechaza mejor las perturbaciones en más rango de frecuencias (a costa de ser más difícil de estabilizar).

7.2 Ejemplo 7.1 – lazo de tensión sobre una carga R_s–C con sumidero de corriente

Fuente $\tilde{d}\,V_{in}$ con $V_{in} = 12\,\text{V}$, $R_s = 0{,}25\,\Omega$ en serie, $C = 640\,\mu\text{F}$ a masa y un sumidero $\tilde{\imath}_o$. $G = \dfrac{\tilde{v}}{\tilde{d}} = \dfrac{V_{in}}{1+R_sCs}$ (polo $f_p = 994{,}7\,\text{Hz}$, 21,6 dB). Perturbación de carga en lazo abierto ($\tilde{d} = 0$): $\left.\dfrac{\tilde{v}}{\tilde{\imath}_o}\right|_{l.a.} = -\dfrac{R_s}{1+R_sCs}$. Con $f_c = 10\,\text{kHz}$: $R(s) = \dfrac{\omega_c}{V_{in}}\dfrac{1+R_sCs}{s}$ ($K_p = \omega_c R_s C/V_{in} = 0{,}838$, $T_i = R_sC = 160\,\mu\text{s}$), y

$$\left.\frac{\tilde{v}}{\tilde{\imath}_o}\right|_{l.c.} = -\frac{R_s}{1+R_sCs}\cdot\frac{s}{s+\omega_c}.$$

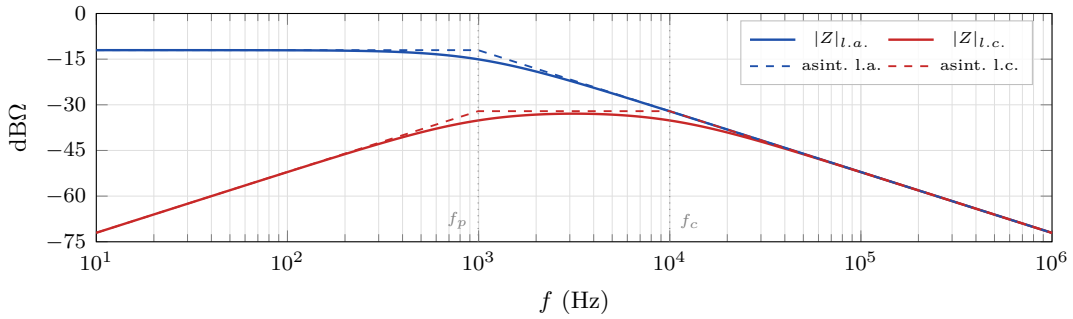


Figura 15. $|\tilde{v}/\tilde{\imath}_o|$ en lazo abierto y cerrado (exacto y asintótico). Por debajo de f_c el lazo rebaja la impedancia en $|L|$; por encima ambas coinciden.

Rizado de carga $\tilde{\imath}_o = 4\,\text{A}\sin(2\pi ft)$ (valores exactos):

f	$\lvert Z\rvert_{l.a.}$ / fase	$\tilde{v}_{pico}$ l.a.	$\lvert Z\rvert_{l.c.}$ / fase	$\tilde{v}_{pico}$ l.c.
100 Hz	$0{,}2487\,\Omega\ \angle 174{,}3°$	0,995 V	$2{,}487\,\text{m}\Omega\ \angle -96{,}3°$	9,95 mV
50 kHz	$4{,}97\,\text{m}\Omega\ \angle 91{,}1°$	19,9 mV	$4{,}88\,\text{m}\Omega\ \angle 102{,}4°$	19,5 mV

(La fase de $-Z$ incluye los 180° del signo.) Con el lazo cerrado el rizado a 100 Hz baja 100× ($=|L(j2\pi 100)|$); a 50 kHz, $f > f_c$, apenas cambia.

7.3 Impedancia de salida en lazo abierto y cerrado

La impedancia de salida mide *qué bien está regulada la tensión* (cuánto cae $\tilde{v}_o$ si la carga pide $\tilde{\imath}_o$). En lazo abierto se anulan las fuentes independientes (d fijo): para el reductor, $Z_{out,OL} = L \parallel C\,(\parallel R) = \dfrac{sL}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$ (pico $= R$ si R es la carga en paralelo; ∞ sin ella).

Los dos casos con signo opuesto

Lazo de tensión (se quiere fuente de tensión, Z_{out} *pequeña*): $\tilde{v}_o = \tilde{\imath}_o Z_{OL} - \tilde{v}_o L \Rightarrow$

$$Z_{CL} = \left.\frac{\tilde{v}_o}{\tilde{\imath}_o}\right|_{\tilde{v}_{ref}=0} = \frac{Z_{OL}}{1 + L(s)}.$$

Lazo de corriente (se quiere fuente de corriente, Z_{out} *grande*): con $\tilde{\imath} = \dfrac{U\tilde{d} - \tilde{v}_o}{R + Ls}$ y $\tilde{d} = -\tilde{\imath}R(s)$,

$$Z_{CL} = \frac{-\tilde{v}_o}{\tilde{\imath}} = Z_{OL}\big(1 + L(s)\big), \qquad Z_{OL} = R + Ls \;\; (L(s) = R(s)\,U/Z_{OL}).$$

Para $f > f_c$, $Z_{CL} \approx Z_{OL}$ en ambos casos. En el modelo de Norton/Thévenin de un convertidor de corriente cuanto mayor sea $|Z_{CL}|$ mejor se comporta como fuente de corriente.

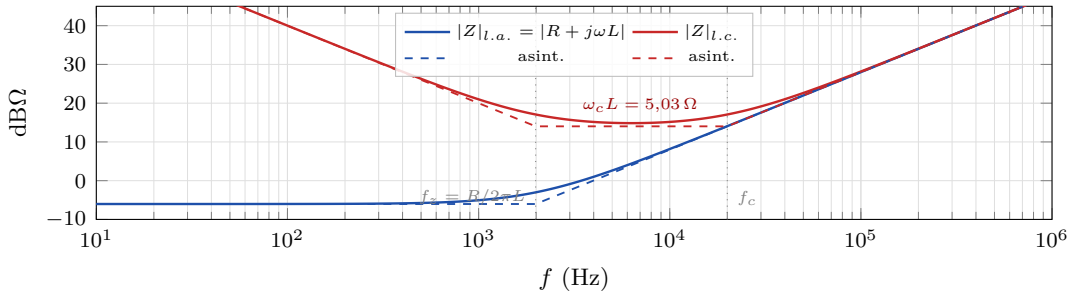


Figura 16. Ejemplo 6.1 (lazo de corriente, $L = \omega_c/s$): $Z_{CL} = (R + sL)(1 + \omega_c/s)$ es enorme a baja frecuencia ($\approx R\omega_c/\omega$), *horizontal* en $\omega_c L = 5{,}03\,\Omega$ entre f_z y f_c y se une a $|R + j\omega L|$ en f_c.

Revisar

En el apunte del profesor sobre el lazo de corriente aparece, junto a la curva de $|Z_{close}|$, la anotación "debería ser horizontal" en la zona intermedia, mientras que el dibujo es una pendiente creciente. Con $L(s) = \omega_c/s$ y $Z_{OL} = R + sL$ **es horizontal** entre R/L y ω_c: $|Z_{CL}| \approx |sL| \cdot \omega_c/|s| = \omega_c L$. La pendiente del dibujo es la errata.

Valores exactos del ejemplo de lazo de corriente (fig. anterior)

- $|Z_{OL}(200\,\text{Hz})| = 0{,}503\,\Omega$.
- $|Z_{CL}(200\,\text{Hz})| = 50{,}3\,\Omega$ $(= Z_{OL} \cdot |1 + L| \approx 0{,}503\,\Omega \cdot 100)$.
- $|Z_{CL}(5\,\text{kHz})| = 5{,}58\,\Omega$.
- En f_c: $7{,}14\,\Omega$ frente a $|Z_{OL}| = 5{,}05\,\Omega$ (el $+3$ dB viene de $|1 + L| = \sqrt{2}$).

Idea clave

La impedancia de salida *en lazo cerrado* es la que alimenta a la etapa siguiente en el criterio de Middlebrook (sección 4): un buen lazo de tensión baja $|Z_{out}|$ por debajo de f_c y facilita cumplir $|Z_{out}| < |Z_{IN}|/2$ (véase el problema J(e) de las resoluciones).

Errores típicos

- Dividir por $1 + L$ en el lazo de corriente: allí la impedancia de salida se *multiplica* por $1 + L$.
- Olvidar el signo ($-180°$) de $\tilde{v}/\tilde{\imath}_o|_{l.a.}$ al calcular la fase del rizado.
- Dar el rizado de $\tilde{v}$ en lazo cerrado con la aproximación Z_{OL}/L cerca de f_c: allí el error es hasta 3 dB; usa $1/|1 + L|$ si piden valor exacto.
- Mezclar l.a. y l.c.: en lazo abierto el rizado es $|Z_{OL}|\,\hat{\imath}_o$ (sin dividir).

8 Cómo se pregunta en examen

El Tema 2 aparece en *todos* los parciales y PEC de los últimos años con dos bloques casi fijos: (i) un **ejercicio de control** (convertidor visto como $d\,v_{in}$ o $d\,i_{in}$ sobre una red R–L o R–C, regulador PI o integral, margen de fase, rechazo de perturbaciones e impedancia de salida), de 4 a 10 puntos, y (ii) un **ejercicio de estabilidad** (batería o panel + filtro + convertidor de potencia constante, criterio de Middlebrook, añadir C_p o una rama R–C), de 2 a 5 puntos; a veces una linealización suelta ($V = P/I$ o $v = ai^2$).

8.1 Receta del ejercicio de control (los apartados salen casi siempre en este orden)

a) D**,** P_o**,** η**.** Ecuación de malla en *continua* (bobina = corto, condensador = abierto): $DV_{in} = \sum$ caídas $+V_o$. Con fuente $d\,i_{in}$: $DI_{in} = I_o$. $\eta = P_o/P_{in}$, $P_{in} = DV_{in}I_{in}$ (la fuente ve las caídas RI^2).

b) $G(s) = \tilde{y}/\tilde{d}$ **y Bode.** Anula las demás fuentes, deja la fuente controlada $\tilde{d}\,V_{in}$ (o $\tilde{d}\,I_{in}$) y escribe $G = G_0/(1+s/\omega_p)$. Da G_0 en dB y f_p. Bode: plano hasta f_p, después -20 dB/dec; fase $0 \to -90°$ (rampa $f_p/10 \to 10f_p$). Truco: a alta frecuencia $|G| \approx V_{in}/(\omega L)$.

c) **Regulador.** $R(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s}) = K_p + \frac{K_i}{s}$: -20 dB/dec hasta $f_z = K_i/(2\pi K_p)$, plano a $20 \log K_p$ después; fase $-90° \to 0°$. Si piden "regulador para un ancho de banda f_c": cancela el polo, $K_p = \omega_c/(G_0\omega_p)$, $T_i = 1/\omega_p$.

d) $L = RG$**,** f_c **y MF.** Suma dB y fases. f_c es el cruce por 0 dB; MF $= 180° + \angle L(j\omega_c)$. Con el PI cancelando: $L = \omega_c/s$, MF $= 90°$. Con rampas de 45°/dec la lectura es asintótica; si piden "exacto", evalúa $|L(j\omega)| = 1$ y arctan.

e) **"Mejora el MF manteniendo el ancho de banda".** Mientras el cero esté por debajo de f_c, $|L| \approx K_p|G|$ y f_c sólo depende de K_p; bajar el cero ($K_i \downarrow$) hacia f_p sube el MF sin mover f_c. Ejemplo (planta $G_0 = 20$, $f_p = 1$ kHz, $K_p = 0{,}5$): cero en 2 kHz $\to f_c = 10{,}1$ kHz, MF $= 84{,}5°$; cero en 5 kHz $\to f_c = 10{,}9$ kHz, MF $= 70{,}7°$.

f) Diagrama de bloques con perturbación (figura de la sección 7): $\tilde{x}_1$ entra tras la planta por $\tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.a.}$ (se calcula con $\tilde{d}=0$).

g) Rechazo en lazo cerrado. $\tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.c.} = \tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.a.}/(1+L)$: por debajo de f_c resta $|L|_{dB}$; por encima coincide con l.a.

h) Rizado senoidal. Amplitud $= |H(j\omega)|\times$ amplitud de entrada; *fase incluida* (el signo de $\tilde{v}/(-\tilde{i}_o)$ aporta 180°). Cerca de f_c usa $|1+L|$ exacto, no $|L|$.

i) Seguimiento de referencia. $\tilde{y}/\tilde{y}_{ref} = L/(1+L)$: $f < f_c \Rightarrow 1\angle 0°$; $f = f_c$ (con $L=\omega_c/s$) $\Rightarrow 0{,}707\angle -45°$; $f \gg f_c \Rightarrow L$.

j) "Ancho de banda máximo sin inestabilidad" (regulador K/s): sube K hasta que el cruce coincida con la frecuencia en que la fase *asintótica* llega a $-180°$ ($10f_p$ si la planta es de un polo): $K_{max} = (10\omega_p)^2/(G_0\omega_p)$. Con la planta exacta el MF queda en $\approx 5{,}7°$ (estable pero muy oscilatorio).

Receta de Middlebrook (panel o batería + filtro + convertidor de potencia constante)

1. **Punto de trabajo.** $P_{IN} = P_o/\eta$. Batería: $V_{IN} = V_{bat}$, $I_{IN} = P_{IN}/V_{bat}$. Panel en modo tensión: $V_p = V_{oc} - R_{Th}I_p$, $V_pI_p = P_{IN} \Rightarrow R_{Th}I_p^2 - V_{oc}I_p + P_{IN} = 0$ (toma la raíz pequeña).
2. $Z_{IN} = -V_{IN}^2/P_{IN}$; dibuja $|Z_{IN}|$ (recta) y el **límite** $|Z_{IN}| - 6\,\text{dB}$ ($= |Z_{IN}|/2$). Peor caso: potencia máxima.
3. Z_{OUT}: anula las fuentes y mira hacia la fuente desde el convertidor (paralelos: domina la menor impedancia; series: la mayor). Bode asintótico en Λ (ωL y $1/\omega C$) con pico en $f_r = 1/2\pi\sqrt{LC}$; el panel añade R_{Th} (o R_N en paralelo en modo corriente).
4. Compara: si $|Z_{OUT}|$ supera el límite en algún punto, **no cumple**. Da el veredicto y la holgura (dB) en el punto peor.
5. **Arreglo:** C_p en la entrada (método gráfico: $1/\omega_x C_p =$ límite en la frecuencia ω_x donde $|Z_{OUT}|$ cruza; luego *comprueba el pico exacto*), rama R_d–C_d con $C_d = nC$, $n \approx 4$–10, o cerrar el lazo del convertidor aguas arriba. Una R serie disipa potencia.

8.2 Mini-test (respuestas al final de la línea)

1. Convertidor regulado, $V_{IN} = 24\,\text{V}$, $P_{IN} = 96\,\text{W}$: Z_{IN}? $-6\,\Omega$
2. Con $|Z_{IN}| = 6\,\Omega$, límite de Middlebrook en dBΩ? $9{,}54\,\text{dB}\Omega$ ($|Z_{IN}| = 15{,}56\,\text{dB}\Omega$)
3. $L = \omega_c/s$: MF, MG y $|\tilde{y}/\tilde{y}_{ref}|$ en f_c. $90°,\ \infty,\ 0{,}707\angle -45°$
4. $G_0 = 20$, $f_p = 1\,\text{kHz}$, quieres $f_c = 10\,\text{kHz}$ con PI que cancela: K y T_i.
   $K = 0{,}5,\ T_i = 159\,\mu\text{s}$
5. Con $L = \omega_c/s$, ¿cuánto atenúa el lazo una perturbación a $f_c/10$? $20\,\text{dB}$ ($|L| = 10$)
6. Reductor con $L = 10\,\mu\text{H}$, $C = 100\,\mu\text{F}$: f_0. $5{,}03\,\text{kHz}$

9 Formulario del Tema 2

Conmutación y filtro

$$\eta_{lin} = \frac{V_o}{V_{in}}, \quad \bar{v}_I = dV_{in}, \quad A_1 = \frac{2V_{in}\sin\pi D}{\pi}, \quad \Delta v_{pp} \approx \frac{V_{in}D(1-D)}{8LCf_{sw}^2} \text{ (complemento)}$$

$$\frac{v_o}{v_I} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = R\sqrt{\tfrac{C}{L}}, \quad Z_0 = \sqrt{\tfrac{L}{C}}$$

$$\text{atenuación del filtro en } f_{sw}: \ -40\log\tfrac{f_{sw}}{f_0} \text{ dB}$$

Pequeña señal del reductor

$$d = D + \tilde{d}, \quad V_o = DV_g, \quad I_L = \frac{V_o}{R}, \qquad f \approx f_A + \partial_x f|_A\,\tilde{x} + \partial_y f|_A\,\tilde{y}$$

$$G_{vd} = \frac{V_g}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \quad G_{vg} = \frac{D}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}, \quad Z_{out,OL} = \frac{sL}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

$$|G_{vd}(j\omega_0)| = QV_g \ (\angle -90^\circ), \qquad \text{pico exacto } \frac{QV_g}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} \text{ en } f_0\sqrt{1 - \tfrac{1}{2Q^2}} \ (Q > 0{,}707)$$

Potencia constante y Middlebrook

$$Z_{IN} = -\frac{V_{IN}^2}{P_{IN}} = -\frac{V_{IN}}{I_{IN}}, \quad P_{IN} = \frac{P_o}{\eta}, \quad \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{v}_{IN}} = \frac{1}{1 + Z_{OUT}/Z_{IN}}, \quad \boxed{|Z_{OUT}| < \tfrac{1}{2}|Z_{IN}| \ \ \forall f} \ (-6\,\text{dB})$$

$$Z_{OUT}^{LC} = \frac{sL}{LCs^2 + 1}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \text{panel: } V_p = V_{oc} - R_{Th}I_p, \quad C_p \gtrsim \frac{L}{R_{Th}|Z_{IN}|/2} \ (Q \gg 1)$$

$$\text{Rama } R_d\text{–}C_d,\ n = \tfrac{C_d}{C} \text{ (complemento): } R_d = Z_0\sqrt{\tfrac{(2+n)(4+3n)}{2n^2(4+n)}}, \quad \max|Z_{OUT}| = Z_0\tfrac{\sqrt{2(2+n)}}{n}$$

$$n_{min} = \tfrac{2+\sqrt{4+16r^2}}{2r^2}, \quad r = \tfrac{|Z_{IN}|}{2Z_0}$$

Lazo de control

$$\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_{ref}} = \frac{L}{1+L}, \quad L = RG, \quad L = \frac{\omega_c}{s} \Rightarrow \text{MF} = 90^\circ,\ \text{MG} = \infty,\ T = \frac{1}{1 + s/\omega_c}$$

$$R = K_p + \frac{K_i}{s} = K\Big(1 + \frac{1}{T_i s}\Big) = K\frac{s+a}{s}$$

$$G = \frac{G_0}{1 + s/\omega_p} \text{ cancelada: } K_p = \frac{\omega_c}{G_0\omega_p},\ K_i = \frac{\omega_c}{G_0},\ T_i = \frac{1}{\omega_p}$$

$$R = \frac{K}{s}: \ \omega_c = \omega_p\sqrt{\tfrac{1}{2}\big(\sqrt{1+4b^2} - 1\big)},\ b = \frac{KG_0}{\omega_p} \ \Big(\omega_c \approx KG_0 \text{ si } f_c \ll f_p\Big), \quad \text{MF} = 90^\circ - \arctan\frac{f_c}{f_p}$$

$$\text{MF} = 180^\circ + \angle L(j\omega_c), \qquad \text{MG} = -|L(j\omega_{180})|_{dB}$$

Perturbaciones e impedancia de salida

$$\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}_1}\Big|_{l.c.} = \frac{\tilde{y}/\tilde{x}_1|_{l.a.}}{1+L}, \qquad Z_{CL}^{(tensión)} = \frac{Z_{OL}}{1+L}, \qquad Z_{CL}^{(corriente)} = Z_{OL}(1+L)$$

$$f < f_c: \ \text{l.c.} \approx \text{l.a.}/L; \quad f > f_c: \ \text{l.c.} \approx \text{l.a.}; \qquad \text{rizado: amplitud} = |H(j\omega)|\,\hat{x}$$