Apuntes

Gestión Electrónica de la Energía Eléctrica

T3 – Almacenamiento de energía eléctrica

Máster Universitario en Ingeniería de la Energía

ETSI Minas y Energía

Hugo Torres Orejudo

Noviembre 2026

Elaborado con IA a partir del material de la asignatura. Material no oficial.

Versión v1.0

Índice general

1 Magnitudes y criterios de selección **2**
1.1 Energía frente a potencia . . . 2
1.2 Diagrama de Ragone . . . 2
1.3 La impedancia de salida limita la potencia . . . 3
1.4 Vida útil y fin de vida . . . 4

2 Baterías **5**
2.1 Modelo eléctrico del profesor . . . 5
2.2 Parámetros . . . 5
2.3 Asociación de celdas . . . 6
2.4 Carga, rizado y rendimiento . . . 6
2.5 Tecnologías (orden de magnitud) . . . 7

3 Supercondensadores **8**
3.1 Modelo y ecuaciones . . . 8
3.2 Asociación de celdas . . . 8
3.3 Baterías frente a supercondensadores . . . 9

4 Dimensionamiento de un banco de almacenamiento **10**
4.1 Qué hay que comprobar . . . 10
4.2 Ejemplo resuelto: bus de 100 V ±10 % . . . 10
4.3 Solución híbrida: cada uno en lo suyo . . . 12

5 Volantes, pilas de combustible y sistemas híbridos **13**
5.1 Volante de inercia (resumen) . . . 13
5.2 Pila de combustible (resumen) . . . 13
5.3 Optimización de masa de una fuente híbrida . . . 13
5.4 Arquitecturas híbridas . . . 14

6 Resumen de fórmulas y mini-test **15**

Resumen

Resumen de los elementos de almacenamiento que aparecen en el temario (baterías, supercondensadores, y, a nivel resumen, volantes de inercia y pilas de combustible), con el modelo eléctrico que se usa en clase, las reglas de asociación serie/paralelo y el procedimiento de dimensionamiento para un bus regulado. Todos los números de los ejemplos están calculados con un script de Python (`calc_GEEE_T3.py`).

1 Magnitudes y criterios de selección

1.1 Energía frente a potencia

Un almacenador se caracteriza por dos números casi independientes: cuánta energía guarda y con qué rapidez puede entregarla o absorberla.

- **Energía específica** (Wh/kg) y **densidad de energía** (Wh/L): energía por unidad de masa o de volumen.
- **Potencia específica** (W/kg) y **densidad de potencia** (W/L): potencia máxima por unidad de masa o volumen que puede entregarse durante un intervalo corto.

Una aplicación puede estar *limitada por energía* (mucha energía, potencia moderada, p. ej. un móvil o un coche eléctrico) o *limitada por potencia* (picos cortos y altos, p. ej. el arranque de un ascensor). La tecnología adecuada es la que se queda corta en la magnitud que a la aplicación le sobra.

1.2 Diagrama de Ragone

El diagrama de Ragone coloca cada tecnología en el plano (potencia específica, energía específica) con ejes logarítmicos. Las rectas diagonales son de *tiempo de descarga constante*, porque

$$t = \frac{E}{P} \quad \Longrightarrow \quad \log E = \log P + \log t.$$

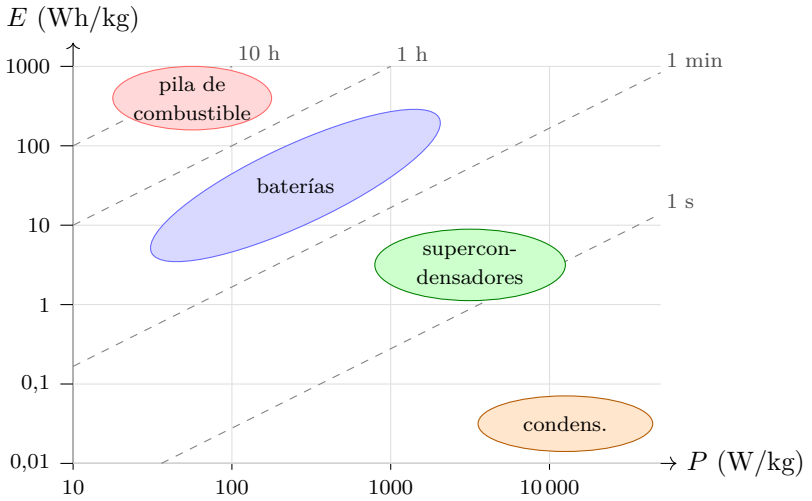


Figura 1. Ragone esquemático: regiones aproximadas de cada tecnología y diagonales de tiempo de descarga $t = E/P$. Las pilas de combustible están arriba a la izquierda (mucha energía, poca potencia); los condensadores abajo a la derecha.

Fórmulas clave: Ragone

$$t = \frac{E_{esp}}{P_{esp}} \qquad \text{(Wh/kg dividido por W/kg da horas)}$$

Ejemplo 1.1. Un supercondensador de 1 Wh/kg que entrega 1000 W/kg se vacía en:

$$t = \frac{1}{1000}\ \text{h} = 3{,}6\,\text{s}$$

Una batería de 100 Wh/kg a 200 W/kg dura:

$$t = \frac{100}{200} = 0{,}5\,\text{h} = 30\,\text{min}$$

1.3 La impedancia de salida limita la potencia

Un almacenador real es una fuente V_g con una resistencia serie R_o. Si el bus exige $V_o \geq V_{o,min}$:

$$I_{o,max} = \frac{V_g - V_{o,min}}{R_o}, \qquad P_{max} = \frac{V_g^2}{4R_o} \quad (\text{con } V_o = V_g/2,\ \text{carga resistiva adaptada}).$$

Con $R_o = 0$ la potencia sería ilimitada, pero la energía sigue acotada (en un condensador, $\frac{1}{2}CV^2$).

Ejemplo 1.2: $V_g = 48\,\text{V}$, $R_o = 0{,}1\,\Omega$, $V_{o,min} = 43{,}2\,\text{V}$.

$$I_{o,max} = \frac{48 - 43{,}2}{0{,}1} = \underline{48\,\text{A}}$$

$$P_{max} = \frac{V_g^2}{4R_o} = \frac{48^2}{4 \cdot 0{,}1} = \underline{5760\,\text{W}}$$

1.4 Vida útil y fin de vida

La *vida útil* es el tiempo que transcurre hasta cumplir un criterio de fin de vida. Para supercondensadores se toma típicamente $C_{fin} = 0{,}8\,C_{ini}$ y $R_{ESR,fin} = 2\,R_{ESR,ini}$: el banco debe **dimensionarse para que cumpla al final de vida**, no cuando es nuevo. La vida restante (ELD) se estima extrapolando linealmente dos medidas de C hasta el 80 %; no debe extrapolarse desde la zona inicial, de caída rápida y no lineal.

Ejemplo 1.3. Se mide $C = 95\,\%$ y mil horas después 93 % (zona lineal).

$$\text{pendiente} = 2\,\%/1000\,\text{h}$$

Hasta el 80 % faltan 13 %:

$$\text{ELD} = \frac{13}{0{,}002} = \underline{6500\,\text{h}}$$

En baterías la vida en ciclos depende de la **profundidad de descarga (DoD)** y de la **temperatura**: menos DoD, más ciclos y más energía total entregada; más temperatura, menos vida. Regla práctica para plomo-ácido:

$$\text{Vida}(T) \approx \text{Vida}(25\,^\circ\text{C}) \cdot 2^{-(T-25)/10} \quad (T > 25\,^\circ\text{C}).$$

Con 8 años a 25 °C: 4 años a 35 °C y 2 años a 45 °C.

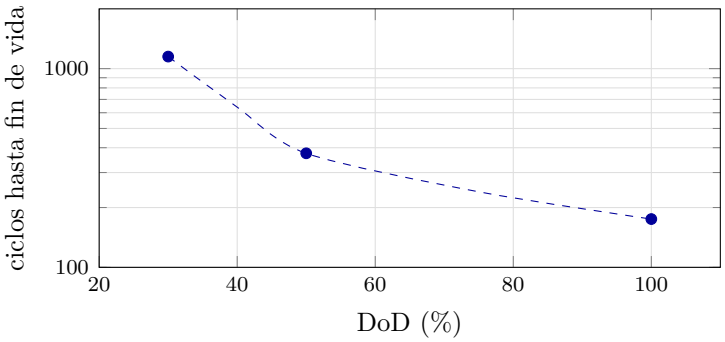


Figura 2. Plomo-ácido gel a 20 °C: ciclos hasta fin de vida frente a DoD (valores aproximados leídos de una curva típica de fabricante).

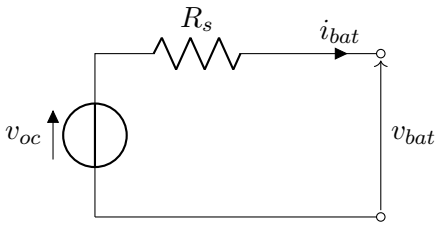
Errores típicos de la sección

- Confundir potencia específica (W/kg) con energía específica (Wh/kg).
- Dimensionar con los datos de celda *nuevos*; olvidar que al fin de vida $C \downarrow$ y $R \uparrow$.
- Creer que cualquier tecnología se escala solo en masa: el banco de supercondensadores está limitado por energía, la batería suele estarlo por corriente/potencia.

2 Baterías

2.1 Modelo eléctrico del profesor

Una batería es una fuente de tensión de circuito abierto v_{oc} en serie con una resistencia R_s, con la corriente i_{bat} **positiva en descarga**. La tensión en circuito abierto cae lentamente con el estado de descarga:



Modelo de batería

$$v_{oc} = v_n - \Delta v \cdot SoD, \qquad v_{bat} = \underbrace{v_n - \Delta v \cdot SoD}_{\text{varía muy lentamente}} - \underbrace{R_s\, i_{bat}}_{\text{varía instantáneamente}}$$

$\Delta v \approx 0{,}1\, v_n$ en los modelos genéricos de clase (en una celda de Li-ion concreta puede ser mayor: $\sim 0{,}5\,\text{V}$). $SoC = 1 - SoD$.

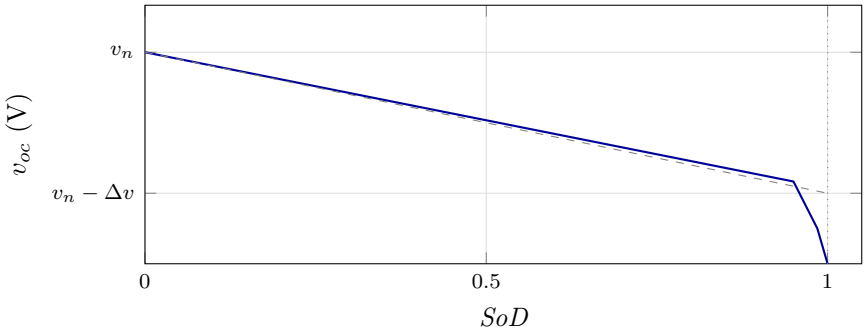


Figura 3. v_{oc} frente a SoD: tramo casi recto de pendiente $-\Delta v$ y caída brusca al agotarse la celda (se usa el tramo lineal, $SoD \lesssim 0{,}9$).

2.2 Parámetros

- **Capacidad C (A·h)** (¡no faradios!): carga que puede entregar. $SoD = \dfrac{\text{A·h entregados}}{C}$.
- **C-rate**: corriente relativa a la capacidad. Una celda de 1,5 A h: 1C = 1,5 A, 5C = 7,5 A. La corriente máxima de descarga es proporcional a la capacidad (habitualmente **20C**).
- **Energía almacenada** $E = v_{oc}\, C$ (Wh); **energía específica** ρ_E (Wh/kg).
- Cuanto más rápido se descarga, menos energía útil se obtiene (la caída $R_s i$ aumenta y la capacidad efectiva baja).

2.3 Asociación de celdas

	N_s **en serie**	N_p **en paralelo**
v_{ocT}	$N_s\, v_{oc}$	v_{oc}
R_{sT}	$N_s\, R_s$	R_s/N_p
C_T (A·h)	C (se mantiene)	$N_p\, C$
Corriente	la misma en todas	se reparte
Energía	$N_s\, v_{oc}\, C$	$N_p\, v_{oc}\, C$

Para una matriz $N_s \times N_p$ (paquete $N_s sN_p p$):

$$V = N_s v_{cel}, \quad C_T = N_p C_{cel}, \quad R_{sT} = R_{cel}\frac{N_s}{N_p}, \quad E = N_s N_p E_{cel}, \quad I_{max} = N_p \cdot 20 C_{cel}.$$

En paralelo conviene que las celdas sean iguales: como R_s depende de la capacidad, una celda de menor capacidad puede acabar actuando como carga de la mayor.

Ejemplo 2.1 (celda). $v_n = 4{,}2\,\text{V}$, $\Delta v = 0{,}5\,\text{V}$, $R_s = 22\,\text{m}\Omega$, $C = 3{,}4\,\text{A h}$. Descarga a 3C ($i = 10{,}2\,\text{A}$) con $SoD = 0{,}3$.

$$R_s i = 0{,}022 \cdot 10{,}2 = 0{,}224\,\text{V}$$

$$v_{bat} = 4{,}2 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 - 0{,}022 \cdot 10{,}2 = \boxed{3{,}826\,\text{V}}$$

Corriente máxima $20C = 68\,\text{A}$.

Ejemplo 2.2 (paquete 6s4p con la celda anterior).

$$v_{ocT}(SoD = 0) = 6 \cdot 4{,}2 = \boxed{25{,}2\,\text{V}} \qquad C_T = 4 \cdot 3{,}4 = \boxed{13{,}6\,\text{A h}}$$

$$R_{sT} = \frac{22 \cdot 6}{4} = \boxed{33\,\text{m}\Omega}$$

$$E = 24 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}4 = \boxed{342{,}7\,\text{W h}}$$

$$I_{max} = 4 \cdot 68 = 272\,\text{A}$$

Con $SoD = 0{,}3$ y $i_{bat} = 40{,}8\,\text{A}$ (3C del paquete):

$$v_{bat} = 6(4{,}2 - 0{,}15) - 0{,}033 \cdot 40{,}8 = \boxed{22{,}95\,\text{V}}$$

2.4 Carga, rizado y rendimiento

Las baterías son dispositivos de continua: cualquier tensión alterna superpuesta (rizado) reduce su vida, de modo que el cargador necesita un buen filtrado. La carga típica es en dos fases (Fig. 4): **corriente constante (CC)** hasta alcanzar la tensión de flotación y **tensión**

constante (CV), en la que la corriente decae exponencialmente. **Ejemplo 2.3.** Batería de 20 A h cargada a 10 A desde $SoC = 0{,}2$ hasta 0,8:

$$t_{CC} = \frac{0{,}6 \cdot 20}{10} = 1{,}2\,\text{h}$$

En CV con $\tau = 15\,\text{min}$ la corriente baja hasta $0{,}05C = 1\,\text{A}$ en:

$$t_{CV} = \tau \ln \frac{10}{1} = 34{,}5\,\text{min}$$

La carga introducida es:

$$Q = 10 \cdot \tau\,(1 - 0{,}1) = 2{,}25\,\text{A h} \qquad (\Delta SoC = 0{,}1125)$$

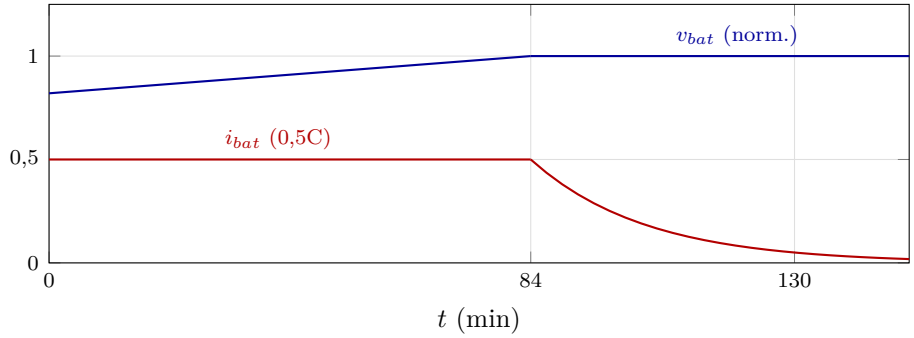


Figura 4. Carga CC-CV (ejemplo: 0,5C, $\tau = 20\,\text{min}$): i_{bat} constante y después exponencial decreciente; v_{bat} crece hasta la tensión de flotación y se mantiene.

Rendimiento. La eficiencia de carga es alta con la batería vacía y la de descarga con la batería llena, de modo que el rendimiento de un ciclo es máximo con SoC intermedio ($\sim 0{,}5$). Rendimiento de ciclo $= \eta_c \eta_d$.

2.5 Tecnologías (orden de magnitud)

	Energía esp. (Wh/kg)	Potencia pico (W/kg)	Ciclos	Rend.
Plomo-ácido	35–50	150–400	500–1000	$> 80\,\%$
Ni/Cd	50–60	80–150	~ 800	75 %
Ni/MH	70–95	200–300	750–1200	70 %
Li-ion	80–130	200–300	> 1000	$> 95\,\%$

Modelos más finos añaden una red $R \parallel C$ en serie con R_s (Thévenin) para reproducir el transitorio; para el dimensionamiento basta el modelo v_{oc}–R_s.

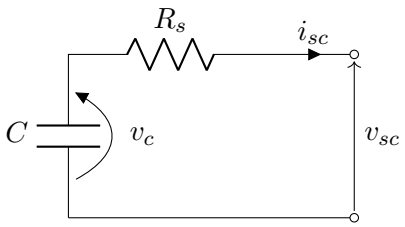
Errores típicos de la sección

- Tratar C en A·h como si fuera en F: en serie la capacidad en A·h *no* se divide.
- Olvidar que $i_{bat} > 0$ es descarga: el signo de $R_s i_{bat}$ es negativo en descarga y positivo en carga.
- Calcular la energía con 300 V o con otra tensión distinta de la nominal sin decirlo (conviene el caso peor, pero hay que justificarlo).

3 Supercondensadores

3.1 Modelo y ecuaciones

Un supercondensador (doble capa, EDLC) se modela como C en serie con la ESR R_s; solo soporta tensiones bajas por celda (2,5 V a 2,7 V). Con $i_{sc} > 0$ saliente:



Supercondensador

$$v_{sc}(t) = v_c(0) - \frac{1}{C}\int_0^t i_{sc}\,dt - R_s\,i_{sc}(t), \qquad \Delta v_c = \frac{I\,t}{C} = \frac{\Delta Q}{C}$$

$$E = \tfrac{1}{2}C\,v^2, \qquad E_{util} = \tfrac{1}{2}C\,(V_{max}^2 - V_{min}^2), \qquad SoC_E = \left(\frac{v}{V_{nom}}\right)^2$$

A diferencia de la batería, **la tensión varía con la energía almacenada**. Si la tensión cae un 30 %, queda $SoC_E = 0{,}7^2 = 0{,}49$: se ha usado el 51 % de la energía. Si el banco trabaja entre V_{max} y $V_{min} = V_{max}/2$, la energía útil es el 75 % de la almacenada.

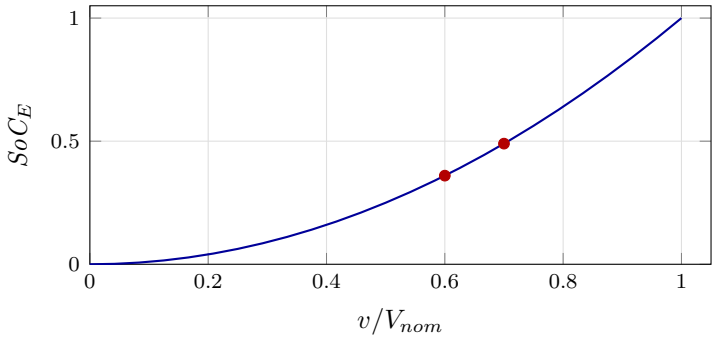


Figura 5. La energía almacenada crece con el cuadrado de la tensión. Una caída del 40 % (de 2,5 a 1,5 V) deja $SoC_E = 0{,}36$: se ha usado el 64 %.

3.2 Asociación de celdas

	N_s **en serie**	N_p **en paralelo**
R_{sT}	$N_s R_s$	R_s/N_p
v_{scT}	$N_s v_{sc}$	v_{sc}
C_T (F)	C/N_s	$N_p C$
Energía	$\frac{N_s}{2} C v_{sc}^2$	$\frac{N_p}{2} C v_{sc}^2$

Matriz $N_s \times N_p$:

$$C_T = C_{cel}\frac{N_p}{N_s}, \quad R_{sT} = R_{cel}\frac{N_s}{N_p}, \quad V_{max} = N_s V_{cel,max}, \quad R_{sT}C_T = R_{cel}C_{cel}.$$

La constante de tiempo no depende de la asociación. Además, en serie la capacidad (en F) se divide, mientras que la de la batería (en A·h) se mantiene: en el condensador lo que se conserva en serie es la *carga* $Q = C_T v$, no C.

Revisar

La diapositiva de la asociación *en paralelo* de supercondensadores rotula «Energía n celdas en serie: $E_T = \frac{1}{2}nCv_{sc}^2$»: debe decir *en paralelo*. La fórmula $E_T = \frac{n}{2}Cv_{sc}^2$ vale para n celdas, sea en serie o en paralelo.

Ejemplo 3.1 (banco 41s22p). Celda de 2,7 V, 120 F, ESR = 8 mΩ.

$$C_T = \frac{120 \cdot 22}{41} = 64{,}4\,\text{F}$$

$$R_{sT} = \frac{8 \cdot 41}{22} = 14{,}9\,\text{m}\Omega$$

$$V_{max} = 41 \cdot 2{,}7 = 110{,}7\,\text{V}$$

$$E = \tfrac{1}{2}\,64{,}4\,(110{,}7)^2 = 394{,}6\,\text{kJ} = 109{,}6\,\text{W h}$$

Comprobación: $902 \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 2{,}7^2 = 394{,}6$ kJ ✓.

Ejemplo 3.2 (energía útil). Un banco de $C_T = 40$ F y $V_{max} = 12$ V que baja a 6 V entrega:

$$E_{util} = \tfrac{1}{2} \cdot 40\,(144 - 36) = 2160\,\text{J} = 0{,}6\,\text{W h}$$

3.3 Baterías frente a supercondensadores

Supercondensadores	Baterías
Mayor densidad de potencia, ESR muy baja	Mayor densidad de energía (∼ 10×)
Carga/descarga muy rápidas, rendimiento 97–98 %	Rendimiento 80–95 %
Más de 10^6 ciclos	200–1000 ciclos (según DoD)
Tensión variable con la energía	Tensión casi constante
Poco sensibles a baja temperatura	Peor a baja temperatura

Errores típicos de la sección

- Aplicar $C_T = \sum C$ en serie (es C/N_s) o olvidar que $R_{sT} = R\,N_s/N_p$.
- Usar $E = \frac{1}{2}CV_{max}^2$ como energía *útil*: hay que restar la que queda a V_{min}.
- Redondear N_s o N_p al entero más cercano o hacia abajo (ver sección siguiente).

4 Dimensionamiento de un banco de almacenamiento

4.1 Qué hay que comprobar

Para un perfil de corriente $i_{load}(t)$ en un bus de tensión $V_{bus} \pm \epsilon$ hay que cumplir **cuatro** cosas: (1) la energía/carga neta, (2) la tensión del bus, (3) la corriente máxima de descarga y de carga y (4) la impedancia de salida (la caída $R_{sT} i$ dentro de la banda). Si el bus no está regulado bastan (1)–(3).

Procedimiento: batería

1. Carga neta $\Delta Q = \int i\, dt$ (A·h) o energía $E \approx V_{bus} \Delta Q$.
2. $N_s = \left\lceil \dfrac{V_{bus,max}}{v_{cel,max}} \right\rceil$ (ninguna celda por encima de su máxima con el bus arriba).
3. $N_p \geq \left\lceil \dfrac{I_{max}}{20 C_{cel}} \right\rceil$ por corriente; $N_p \geq \left\lceil \dfrac{R_{cel} N_s\, I_{max}}{\Delta V_{adm}} \right\rceil$ por caída de tensión; $N_p \geq \left\lceil \dfrac{\Delta Q}{C_{cel}\, \Delta SoD_{adm}} \right\rceil$ por energía.
4. Se toma el **mayor** N_p, se simula/comprueba la banda y el SoD final.
5. Masa $= N_s N_p\, m_{cel}$ (o E/ρ_E).

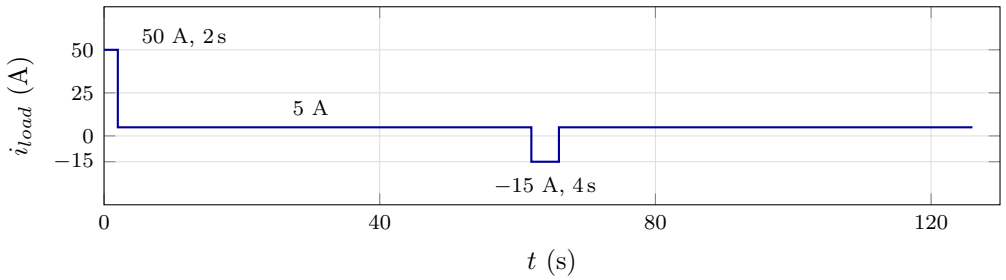
Procedimiento: supercondensador

1. $C_T \geq \Delta Q / \Delta V_{adm}$ (ideal, sin ESR) o $E_{util} = \frac{1}{2} C_T (V_1^2 - V_2^2)$.
2. $N_s = \left\lceil \dfrac{V_{bus,max}}{v_{cel,max}} \right\rceil$.
3. $N_p \geq \left\lceil \dfrac{C_T N_s}{C_{cel}} \right\rceil$ por capacidad; $N_p \geq \left\lceil \dfrac{I_{max}}{I_{cel,max}} \right\rceil$ por corriente.
4. Con ESR: $\Delta V_{tot} = \dfrac{\Delta Q}{C_T} + R_{sT}\, i \leq \Delta V_{adm}$; si no se cumple se aumenta N_p.
5. Masa $= N_s N_p\, m_{cel}$.

Redondeo: el número de celdas es entero y siempre se redondea **hacia arriba** (por exceso), porque la condición es un mínimo.

4.2 Ejemplo resuelto: bus de 100 V ±10 %

Bus 90 V a 110 V. Perfil: 50 A durante 2 s; 5 A durante 60 s; −15 A (regeneración) durante 4 s; 5 A durante 60 s.



Carga neta:

$$\Delta Q = 50 \cdot 2 + 5 \cdot 60 - 15 \cdot 4 + 5 \cdot 60 = 640\,\text{A s}$$
$$= \boxed{0{,}178\,\text{A h}}$$

Batería. Celda: $v_n = 4{,}2\,\text{V}$, $\Delta v = 0{,}6\,\text{V}$, 2,5 A h, 20C, $R_{cel} = 20\,\text{m}\Omega$, 45 g. Bus nominal con $SoD_0 = 0{,}5$.

- $N_s = \lceil 110/4{,}2 \rceil = \lceil 26{,}19 \rceil = \boxed{27}$. Tensión inicial $27(4{,}2 - 0{,}3) = 105{,}3\,\text{V}$.
- Corriente: $50/(20 \cdot 2{,}5) = 1{,}0 \Rightarrow N_p \geq 1$.
- Caída: $\Delta V_{adm} = 105{,}3 - 90 = 15{,}3\,\text{V}$; $R_{sT} \leq 15{,}3/50 = 306\,\text{m}\Omega$, es decir, $N_p \geq 20 \cdot 27/306 = 1{,}76 \Rightarrow 2$.
- Energía: con $N_p = 2$, $C_T = 5\,\text{A h}$, $\Delta SoD = 0{,}178/5 = 0{,}036$ (sin problema).
- **Solución:** 27s 2p = $\boxed{54\text{ celdas}}$, $R_{sT} = 270\,\text{m}\Omega$. Simulando el perfil: $v_{bus} \in [91{,}7\,\text{V}, 109{,}0\,\text{V}]$ (dentro de la banda) y $SoD_{fin} = 0{,}536$. Masa $54 \cdot 45\,\text{g} = \boxed{2{,}43\,\text{kg}}$.

Supercondensador. Celda: 2,7 V, 120 F, ESR 8 mΩ, 40 A, 16 g; parte de 100 V, con $\Delta V_{adm} = 10\,\text{V}$.

- $N_s = \lceil 110/2{,}7 \rceil = \lceil 40{,}74 \rceil = \boxed{41}$.
- $C_T = 640/10 = 64\,\text{F}$ (ideal); $N_p = \lceil 64 \cdot 41/120 \rceil = \lceil 21{,}87 \rceil = 22$.
- Corriente: $50/40 = 1{,}25 \Rightarrow N_p \geq 2$ (no limita).
- ESR: con $N_p = 22$, $R_{sT} = 14{,}9\,\text{m}\Omega$ y al final del perfil $v = 100 - 640/64{,}4 - 5 \cdot 0{,}0149 = 89{,}99\,\text{V} < 90\,\text{V}$: **no cumple por** 13 mV. Con $N_p = 23$: $C_T = 67{,}3\,\text{F}$, $v_{min} = \boxed{90{,}42\,\text{V}}$ ✓.
- **Solución:** 41s 23p = $\boxed{943\text{ celdas}}$, masa $\boxed{15{,}1\,\text{kg}}$.

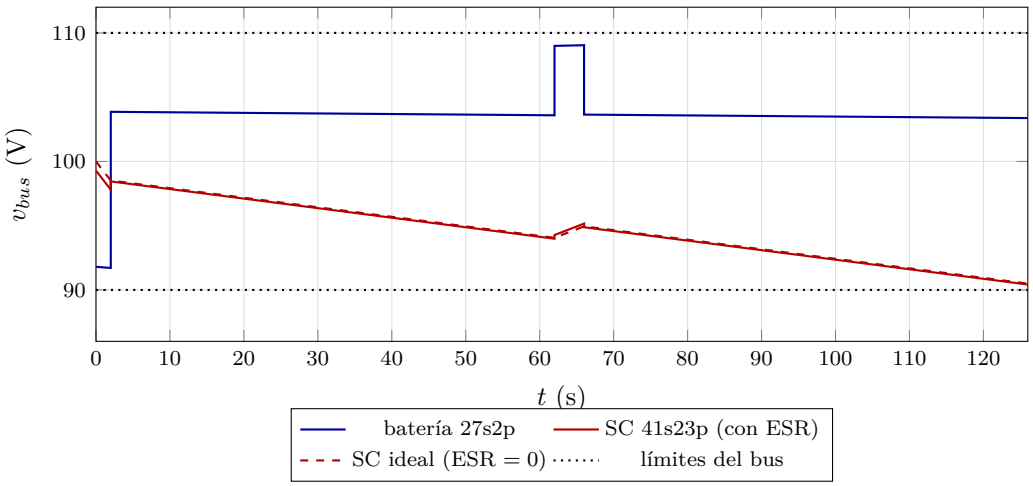


Figura 6. Tensión del bus con cada almacenador. La batería sube y baja con $R_s i$ casi instantáneamente y con deriva lenta del SoD; el supercondensador se descarga como $-\int i\,dt/C$ y los saltos son la caída en la ESR.

Conclusión: para este perfil, dominado por *energía* (0,18 A h a lo largo de más de 2 minutos), la batería pesa ~ 6 veces menos. El supercondensador se justifica para los picos de corriente cortos (véase la sección 5).

Revisar

Redondeo del número de celdas en el material de partida. En el ejercicio de referencia del bus de 270 V ±10 % el resultado $N_s = 297/v_{cel,max}$ se redondea *hacia abajo*: 70,7 → 70 celdas de batería (4,2 V) y 118,8 → 118 de supercondensador (2,5 V). Con el bus en 297 V cada celda quedaría a $297/70 = 4{,}243\,\text{V} > 4{,}2\,\text{V}$ y $297/118 = 2{,}517\,\text{V} > 2{,}5\,\text{V}$: se supera la tensión máxima. Lo correcto es redondear por exceso: $\lceil 70{,}71 \rceil = \mathbf{71}$ y $\lceil 118{,}8 \rceil = \mathbf{119}$ (4,183 V y 2,496 V por celda). Por la misma razón N_p también va por exceso (p. ej. 983,2 → 984).

Otras correcciones del mismo ejercicio (calculadas con $\Delta Q = 0{,}5\,\text{A h}$, banda de 27 V): (i) con celda de 1 A h y $R = 20\,\text{m}\Omega$, 70s5p da $R_{sT} = 280\,\text{m}\Omega$ y $\Delta V = 28\,\text{V} > 27\,\text{V}$: *no cumple* (el apunte lo marca como válido); hacen falta 6 ramas (23,3 V). (ii) El banco de supercondensadores 120s1608p sale de redondear $C_T = 66{,}7\,\text{F}$ a 67 F; con el valor exacto $N_p = 1600$ sin ESR, y **1609** al incluir la ESR (con 1608 queda $\Delta V = 27{,}015\,\text{V} > 27\,\text{V}$). (iii) «900 celdas en paralelo» dan $\Delta V \approx 47\,\text{V}$, que sigue excediendo la banda. (iv) «1 string – máx. 20 Ah» debe leerse 20 A. (v) Las dos versiones usan celdas distintas (5 Ah/2,5 mΩ y 1 Ah/20 mΩ): no son comparables entre sí.

4.3 Solución híbrida: cada uno en lo suyo

La batería es buena para *energía* (picos anchos y bajos) y el supercondensador para *potencia* (picos estrechos y altos). Una arquitectura típica: un rectificador (o batería con DC/DC regulado a corriente) aporta el nivel medio y el banco de supercondensadores en el bus absorbe el exceso. Así el supercondensador sólo ve el escalón (pico menos el nivel base) y se reduce mucho su carga neta. El DC/DC, sin embargo, también pesa (del orden de 500 W/kg), y hay que sumarlo al balance de masa.

Errores típicos de la sección

- Redondear N_s a la baja (se supera $v_{cel,max}$) o al entero más próximo.
- Calcular N_p solo por capacidad y olvidar la comprobación con la ESR (o al revés).
- No comprobar la banda en el *instante peor*: justo al final del escalón de mayor corriente (batería) o al final del último tramo de descarga (supercondensador).
- Comparar masas con distinta energía *útil*.

5 Volantes, pilas de combustible y sistemas híbridos

5.1 Volante de inercia (resumen)

Un rotor acelerado a muy alta velocidad guarda la energía cinética $E = \frac{1}{2}J\omega^2$. Se usa en SAI, vehículos y aplicaciones espaciales. Como en el supercondensador, la energía útil depende de la ventana de velocidad: $E_{util} = \frac{1}{2}J(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)$.

Ejemplo 5.1. Disco macizo de $m = 25\,\text{kg}$ y $r = 0{,}2\,\text{m}$:

$$J = \tfrac{1}{2}mr^2 = 0{,}5\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

A $30\,000\,\text{rpm}$ ($\omega = 3141{,}6\,\text{rad/s}$):

$$E = \tfrac{1}{2}J\omega^2 = 2{,}467\,\text{MJ} = 0{,}685\,\text{kW}\,\text{h}$$

Si sólo se permite bajar a la mitad de velocidad:

$$E_{util} = \underline{0{,}514\,\text{kW}\,\text{h}} \qquad (\text{el } 75\,\%)$$

5.2 Pila de combustible (resumen)

Una pila de combustible es un dispositivo de *conversión*: produce electricidad y calor mientras se le suministre combustible y oxidante (no se «descarga»). Con hidrógeno:

$$\text{ánodo: } \mathrm{H_2} \to 2\mathrm{H^+} + 2\mathrm{e^-}, \qquad \text{cátodo: } \tfrac{1}{2}\mathrm{O_2} + 2\mathrm{H^+} + 2\mathrm{e^-} \to \mathrm{H_2O} \quad (E_r = 1{,}23\,\text{V}).$$

Su curva de polarización $v(j)$ tiene tres zonas de pérdidas: *activación* (caída inicial rápida), *óhmica* (tramo lineal) y de *transporte de masa* (caída final). El rendimiento de tensión es $\eta_v = v/1{,}23\,\text{V}$: a $0{,}7\,\text{V}$ es $57\,\%$.

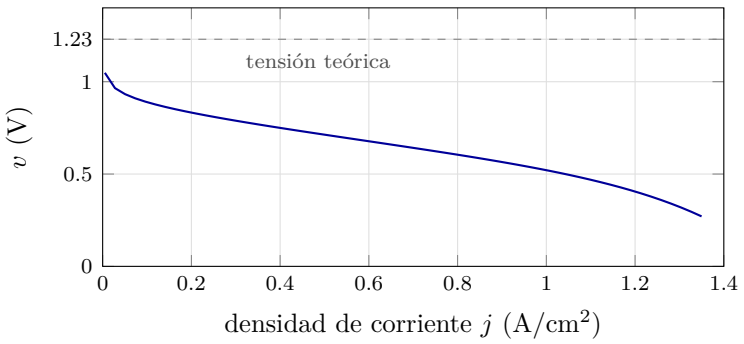


Figura 7. Curva de polarización cualitativa (forma ilustrativa, no son datos de una pila real).

5.3 Optimización de masa de una fuente híbrida

Dos tecnologías con energía específica η_E (Wh/kg) y potencia específica η_P (W/kg). Para una aplicación de energía E y potencia de pico P:

$$\min\,(m_1 + m_2) \quad \text{s.a.} \quad \eta_{P1}m_1 + \eta_{P2}m_2 \geq P, \quad \eta_{E1}m_1 + \eta_{E2}m_2 \geq E.$$

El óptimo suele estar en la **intersección** de las dos restricciones (una tecnología limita por potencia y la otra por energía). Con una sola tecnología la masa es $\max(E/\eta_E,\, P/\eta_P)$.

Ejemplo 5.2. $E = 300\,\text{W h}$, $P = 1500\,\text{W}$. Supercondensador: 5 Wh/kg, 2000 W/kg; batería: 120 Wh/kg, 300 W/kg.

- Sólo supercondensador: $\max(300/5, 1500/2000) = 60\,\text{kg}$ (limita la energía). Sólo batería: $\max(2{,}5;\ 5) = 5\,\text{kg}$ (limita la potencia).
- Intersección: $5m_c + 120m_b = 300$ y $2000m_c + 300m_b = 1500 \Rightarrow m_c = \boxed{0{,}377\,\text{kg}}$, $m_b = \boxed{2{,}484\,\text{kg}}$, $m_{tot} = \boxed{2{,}86\,\text{kg}}$, un 43 % menos que la batería sola.

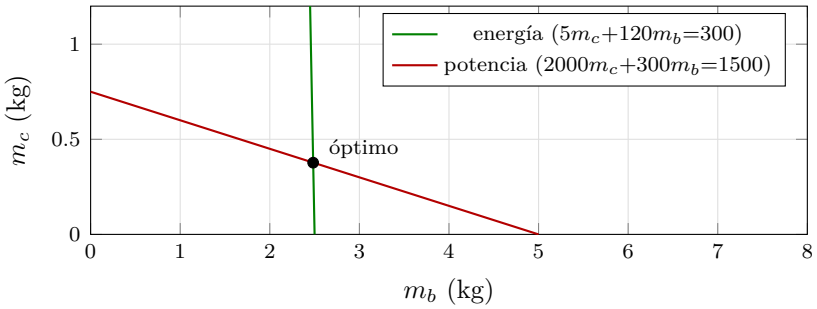
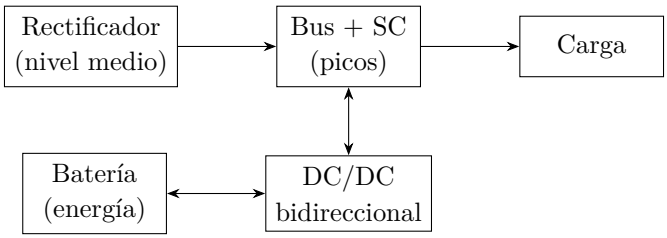


Figura 8. La región factible es la que queda por encima de ambas rectas; el mínimo de $m_b + m_c$ está en el vértice.

> **Revisar**
>
> En el ejemplo de la fuente híbrida de las transparencias (1000 W h, 500 W; supercondensador 10 Wh/kg, 1000 W/kg; pila 1000 Wh/kg, 100 W/kg) el óptimo se da como $0{,}5 + 1 = 1{,}5\,\text{kg}$. Es aproximado: resolviendo el sistema de igualdades $m_{cap} = 0{,}40\,\text{kg}$, $m_{FC} = 0{,}996\,\text{kg}$, total 1,40 kg.

5.4 Arquitecturas híbridas

La batería a través de un DC/DC aporta la energía y el banco de supercondensadores conectado directamente al bus se encarga de los picos de corriente y de la regeneración.



6 Resumen de fórmulas y mini-test

Resumen del tema

Batería:	$v_{bat} = v_n - \Delta v\, SoD - R_s i_{bat}$; $SoD = \mathrm{Ah}_{ent}/C$; $E = v_{oc}C$
Paquete $N_s \times N_p$:	$V = N_s v$, $C_T = N_p C$, $R_{sT} = R N_s/N_p$
Supercondensador:	$\Delta v = It/C$; $E = \frac{1}{2}C(V_1^2 - V_2^2)$; $SoC_E = (v/V_{nom})^2$
Banco SC $N_s \times N_p$:	$C_T = C N_p/N_s$, $R_{sT} = R N_s/N_p$, $V_{max} = N_s v_{max}$
Dimensionamiento:	$N_s = \lceil V_{bus,max}/v_{cel,max} \rceil$; $N_p = \lceil \cdot \rceil$ del mayor criterio
Ragone, impedancia:	$t = E/P$; $I_{o,max} = (V_g - V_{o,min})/R_o$
Vida:	$\mathrm{Vida}(T) = \mathrm{Vida}(25)\, 2^{-(T-25)/10}$; fin de vida SC: $0{,}8C$, $2R$

Mini-test

1. Una celda de 3 A h descarga a 5C. ¿Qué corriente es? *(15 A)*
2. Dos celdas de 2 A h en serie, ¿qué capacidad tiene el conjunto? ¿Y en paralelo? *(2 A·h; 4 A·h)*
3. Dos supercondensadores de 10 F en serie, ¿capacidad? *(5 F)*
4. Un supercondensador cae un 50 % de tensión. ¿Qué fracción de energía se ha extraído? *(75 %)*
5. Bus de 28 V+10 % y celda Li-ion de 4,2 V: ¿cuántas celdas en serie? *($\lceil 30{,}8/4{,}2 \rceil = \lceil 7{,}33 \rceil = 8$)*
6. $N_p = 12{,}01$ por capacidad y $N_p = 11$ por corriente: ¿cuántas ramas? *(13)*
7. ¿Por qué dimensionar un banco de supercondensadores con $0{,}8\,C$ y $2\,R$? *(Criterio de fin de vida.)*
8. Una batería de plomo dura 6 años a 25 °C. ¿Y a 45 °C? *(1,5 años)*