# Resoluciones

Gestión Electrónica de la Energía Eléctrica

T1 – Conceptos básicos

Máster Universitario en Ingeniería de la Energía

ETSI Minas y Energía

Hugo Torres Orejudo

Noviembre 2026



Elaborado con IA a partir del material de la asignatura. Material no oficial.

# Índice general

**1 Señales, fasores y condensador (A–D)** **2**

**2 Bode y método gráfico de impedancias (E–G)** **7**

**3 Convertidores, filtros EMI y control (H–J)** **14**

Resoluciones paso a paso de los problemas A–J (los enunciados se reproducen tal cual desde `GEEE_T1_enun.tex`). Todas las cifras están verificadas con `calc_GEEE_T1_ej.py`; los resultados finales de cada apartado se destacan en verde. En los Bode, la curva azul es la *asintótica* y la roja discontinua la *exacta*.

# 1 Señales, fasores y condensador (A–D)

**A. Valores medio y eficaz de una onda por tramos (1,0 p)**

Una tensión periódica de periodo $T = 4\,\text{ms}$ vale $20\,\text{V}$ entre 0 y 1 ms, desciende linealmente de $20\,\text{V}$ a 0 entre 1 y 3 ms y vale 0 entre 3 y 4 ms. Se aplica a una resistencia $R = 5\,\Omega$.

a) Valor medio y valor eficaz.

b) Factor de forma y factor de cresta.

c) Potencia media disipada y energía disipada por periodo.

d) Valor eficaz de la componente alterna.

**Resolución.**

Tramos de la onda: entre 0 y 1 ms, $u = 20\,\text{V}$; entre 1 y 3 ms, $u = 20\,(3\,\text{ms} - t)/2\,\text{ms}$; entre 3 y 4 ms, $u = 0$.

**a)** Valor medio (área bajo la curva dividida entre $T$):

$$U_m = \frac{20 \cdot 1 + \frac{1}{2}\,20 \cdot 2}{4} = \frac{40\,\text{V ms}}{4\,\text{ms}} = \boxed{10\,\text{V}}$$

Valor eficaz: una rampa que va de $U$ a 0 en $\tau$ aporta $U^2\tau/3$ a la integral del cuadrado.

$$\int_0^T u^2\,dt = 20^2 \cdot 1 + \frac{20^2}{3} \cdot 2 = 666{,}7\ \text{V}^2\text{ms}$$

$$U_{ef}^2 = \frac{666{,}7}{4} = 166{,}7\ \text{V}^2 \qquad U_{ef} = \sqrt{166{,}7} = \boxed{12{,}91\,\text{V}}$$

**b)** Factor de forma y factor de cresta:

$$\text{FF} = \frac{U_{ef}}{U_m} = \frac{12{,}91}{10} = \boxed{1{,}291}$$

$$\text{FC} = \frac{U_{pico}}{U_{ef}} = \frac{20}{12{,}91} = \boxed{1{,}549}$$

**c)** Potencia media y energía por periodo:

$$P = \frac{U_{ef}^2}{R} = \frac{166{,}7}{5} = \boxed{33{,}3\,\text{W}}$$

$$E = P\,T = 33{,}3 \cdot 4\,\text{ms} = \boxed{133{,}3\,\text{mJ}}$$

**d)** Valor eficaz de la componente alterna, a partir de $U_{ef}^2 = U_m^2 + U_{ac}^2$:

$$U_{ac} = \sqrt{U_{ef}^2 - U_m^2} = \sqrt{166{,}7 - 100} = \boxed{8{,}16\,\text{V}}$$

### B. Rectificación con control de fase (1,0 p)

Una tensión senoidal de 325 V de pico se rectifica en onda completa, pero el rectificador sólo conduce desde el ángulo $\alpha = 45°$ hasta $180°$ de cada semiperiodo de la senoide (de modo que $u = 325|\sin\theta|$ para $\theta \in [\alpha, \pi]$ y $u = 0$ en el resto del periodo de rectificación $\pi$). La carga es $R = 10\,\Omega$.

a) Valor medio y valor eficaz de la tensión.

b) Factores de forma y de cresta.

c) Potencia en $R$ y su cociente respecto a la que se tendría con $\alpha = 0$ (rectificación completa).

**Resolución.**

Con $u = U_p \sin\theta$ en $[\alpha, \pi]$ y periodo de rectificación $\pi$:

$$U_m = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi U_p \sin\theta\, d\theta = \frac{U_p(1+\cos\alpha)}{\pi}$$

$$U_{ef}^2 = \frac{U_p^2}{\pi}\int_\alpha^\pi \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{U_p^2}{\pi}\Big[\frac{\pi-\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\Big]$$

**a)** Valor medio:

$$U_m = \frac{325\,(1+0{,}7071)}{\pi} = \boxed{176{,}6\,\text{V}}$$

Valor eficaz:

$$U_{ef}^2 = \frac{325^2}{\pi}\,[1{,}1781 + 0{,}25] = 33\,621 \cdot 1{,}4281 = 48\,015\ \text{V}^2$$

$$U_{ef} = \sqrt{48\,015} = \boxed{219{,}1\,\text{V}}$$

Para comparar, con $\alpha = 0$ serían 206,9 V y 229,8 V.

**b)** Factores de forma y de cresta (el pico $\theta = 90°$ sí está dentro del tramo conductor):

$$\text{FF} = \frac{219{,}1}{176{,}6} = \underline{1{,}241} \qquad \text{FC} = \frac{325}{219{,}1} = \underline{1{,}483}$$

**c)** Potencia en $R$ y potencia con $\alpha = 0$:

$$P = \frac{U_{ef}^2}{R} = \frac{48\,015}{10} = \underline{4801\,\text{W}}$$

$$P_0 = \frac{325^2/2}{10} = 5281\,\text{W} \qquad \frac{P}{P_0} = \frac{4801}{5281} = \underline{0{,}909}$$

Al recortar 45° se pierde sólo el 9 % de potencia, pero el valor medio se reduce un 15 %.

> **C. Fasores y circuito RL (0,75 p)**
>
> (1) Dos corrientes de un nudo son $i_1 = 16\sin(\omega t + 40°)$ A e $i_2 = 12\sin(\omega t - 20°)$ A, con $\omega = 100\pi$ rad/s. Obtener $i_1 + i_2$ por coeficientes seno/coseno y por fasores eficaces.
> (2) Una carga $R = 6\,\Omega$ en serie con $L$ tal que $\omega L = 8\,\Omega$ a 50 Hz se alimenta con $u = 325\sin(\omega t + 10°)$ V. Hallar $L$, el fasor de corriente, el desfase, $P$, $Q$, $S$ y el factor de potencia.

**Resolución.**

**1)** *Coeficientes seno/coseno.* Como $i = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi$, cada corriente aporta $(a, b) = (A\cos\varphi,\ A\sin\varphi)$ sobre $(\sin\omega t, \cos\omega t)$:

$$i_1:\ (12{,}256;\ 10{,}285)$$

$$i_2:\ (11{,}276;\ -4{,}104)$$

$$i_1 + i_2:\ (23{,}533;\ 6{,}180)$$

Amplitud y fase de la suma:

$$\hat{I} = \sqrt{23{,}533^2 + 6{,}180^2} = 24{,}33\,\text{A}$$

$$\varphi = \arctan\frac{6{,}180}{23{,}533} = 14{,}7°$$

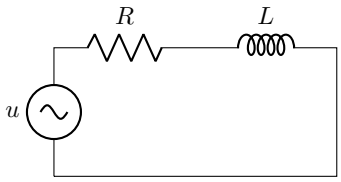
$$i_1 + i_2 = \underline{24{,}33\sin(\omega t + 14{,}7°)\ \text{A}} \qquad (I_{ef} = 17{,}20\,\text{A})$$

*Fasores eficaces:* con $\bar{I}_1 = 11{,}31\angle 40°$ y $\bar{I}_2 = 8{,}485\angle -20°$ se obtiene lo mismo,

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 11{,}31\angle 40° + 8{,}485\angle -20°$$

$$= 17{,}20\angle 14{,}7°\ \text{A}$$

**2)** Inductancia, impedancia y tensión en forma fasorial:




$$L = \frac{\omega L}{\omega} = \frac{8}{100\pi} = \boxed{25{,}46\,\text{mH}}$$

$$\bar{Z} = 6 + j8 = 10\angle 53{,}13^\circ\ \Omega$$

$$\bar{U} = \frac{325}{\sqrt{2}}\angle 10^\circ = 229{,}8\angle 10^\circ\ \text{V}$$

Fasor de corriente y desfase:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{229{,}8\angle 10^\circ}{10\angle 53{,}13^\circ}$$

$$= \boxed{22{,}98\angle -43{,}13^\circ\ \text{A}} \qquad (\hat{I} = 32{,}5\,\text{A})$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 10^\circ - (-43{,}13^\circ) = \boxed{53{,}13^\circ}\ \text{(inductivo)}$$

Potencias y factor de potencia:

$$P = I_{ef}^2 R = 22{,}98^2 \cdot 6 = \boxed{3169\,\text{W}}$$

$$Q = I_{ef}^2 X = 22{,}98^2 \cdot 8 = \boxed{4225\,\text{var}}$$

$$S = U_{ef} I_{ef} = 229{,}8 \cdot 22{,}98 = \boxed{5281\,\text{VA}}$$

$$\text{FP} = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \boxed{0{,}6}\ \text{en retraso}$$

Comprobación: $\sqrt{P^2 + Q^2} = 5281$ VA.

**D. Condensador con corriente pulsada (0,75 p)**

Un condensador $C = 22\,\mu\text{F}$ con $v(0) = 48\,\text{V}$ alimenta una carga que absorbe una corriente periódica de periodo $T = 10\,\mu\text{s}$. Caso A: $i_o = 9\,\text{A}$ durante $2\,\mu\text{s}$ y 0 el resto. Caso B: $i_o = 9\,\text{A}$ durante $2\,\mu\text{s}$ y una corriente constante negativa (carga del condensador) el resto del periodo, de modo que la media sea nula.

a) Valor medio y eficaz de $i_o$ en ambos casos (en B, hallar antes el valor de la corriente negativa).

b) Evolución de $v(t)$ durante tres periodos: caída de tensión en cada pulso de corriente y, en el caso B, rizado pico a pico.

**Resolución.**

**a) Caso A:**

$$\bar{I} = 9 \cdot \frac{2}{10} = \underline{1{,}8\,\text{A}} \qquad I_{ef} = 9\sqrt{0{,}2} = \underline{4{,}02\,\text{A}}$$

**Caso B:** la carga neta en el periodo debe ser nula, luego

$$9 \cdot 2\,\mu\text{s} = I_- \cdot 8\,\mu\text{s}$$

$$I_- = \underline{2{,}25\,\text{A}} \text{ (negativa)}$$

$$\bar{I} = 0$$

$$I_{ef}^2 = \frac{81 \cdot 2 + 2{,}25^2 \cdot 8}{10} = 20{,}25\ \text{A}^2$$

$$I_{ef} = \underline{4{,}5\,\text{A}}$$

**b)** Con la carga extrayendo $i_o$, $C\,dv/dt = -i_o$. Durante el pulso la tensión cae:

$$\Delta v = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{22 \cdot 10^{-6}}$$

$$= \underline{0{,}818\,\text{V}} \qquad \text{(pendiente } 0{,}409\,\text{V}/\mu\text{s)}$$

- **A:** fuera del pulso $v$ se mantiene constante y nada recarga el condensador, así que $v$ baja 0,818 V en cada periodo:

$$v(T) = 47{,}18\ \text{V}$$

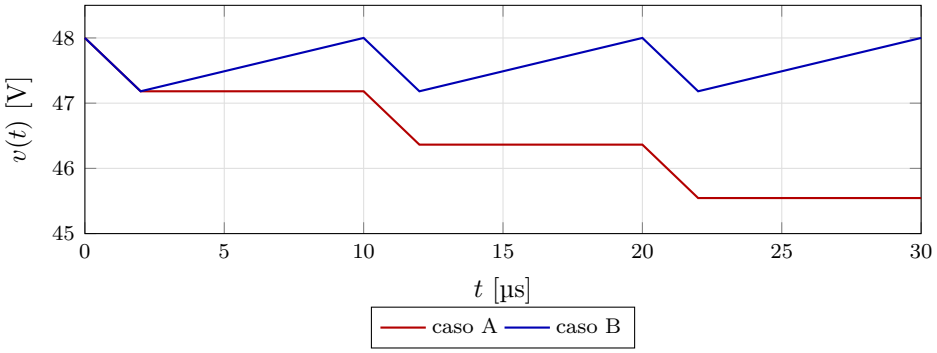
$$v(2T) = 46{,}36\ \text{V}$$

$$v(3T) = \underline{45{,}55\,\text{V}}$$

La deriva total es 2,45 V; no hay régimen periódico, porque la media de la corriente no es nula.

- **B:** en los 8 µs restantes $v$ sube con pendiente $2{,}25/22\,\mu = 0{,}102\,\text{V/µs}$ (+0,818 V). El régimen es periódico: $v$ oscila entre 47,18 V y 48 V, con rizado

$$\Delta v_{pp} = \boxed{0{,}818\,\text{V}}$$




## 2 Bode y método gráfico de impedancias (E–G)

**E. Bode asintótico de una función dada (1,25 p)**

Sea $G(s) = \dfrac{500\,(1 + s/25)}{s\,(1 + s/400)^2}$ ($\omega$ en rad/s).

a) Identificar ceros y polos; dibujar el Bode asintótico de módulo (niveles en dB y pendientes) y de fase.

b) Hallar $|G|$ y $\angle G$ *reales* en $\omega = 100\,\text{rad/s}$ y compararlos con los asintóticos.

c) Si $u(t) = 0{,}1\sin(100\,t)$, ¿cuál es la salida en régimen permanente?

d) Frecuencia a la que el módulo cruza 0 dB (asintótica y real).

**Resolución.**

**a)** Forma normalizada ya dada: $K = 500$, un **polo en el origen**, un **cero** en $\omega_z = 25\,\text{rad/s}$ y un **polo doble** en $\omega_p = 400\,\text{rad/s}$.

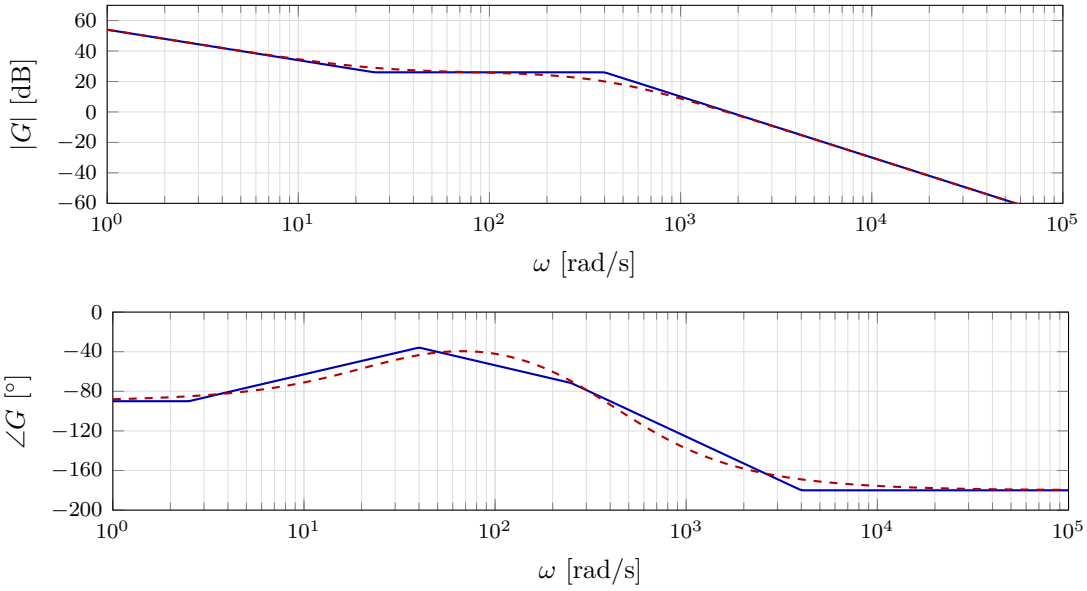
Módulo asintótico, tramo por tramo:

- Para $\omega < 25$: $|G| \approx 500/\omega$ ($-20$ dB/dec), con $20\log 500 = 53{,}98\,\text{dB}$ en $\omega = 1$.
- En $\omega = 25$: $500/25 = 20 \to 26{,}02\,\text{dB}$.
- De 25 a 400 el cero compensa el polo del origen: tramo plano a 26,02 dB.
- Desde 400: $-40$ dB/dec.

Fase asintótica:

- El polo del origen aporta $-90°$.
- El cero suma $+45°$/dec entre 2,5 y 250.

- El polo doble resta 90°/dec entre 40 y 4000.
- En conjunto, la fase parte de $-90°$, sube hasta $0°$ por el cero y termina en $-90+90-180 = -180°$ tras el polo doble.




**b)** *Valor exacto* en $\omega = 100\,\text{rad/s}$:

$$|G(j100)| = \frac{500\sqrt{1+(100/25)^2}}{100\,(1+(100/400)^2)} = \frac{500\cdot 4{,}123}{100\cdot 1{,}0625} = 19{,}40$$

$$|G|_{\text{dB}} = 20\log 19{,}40 = \underline{25{,}76\,\text{dB}}$$

$$\angle G = -90° + \arctan 4 - 2\arctan 0{,}25 = -90 + 75{,}96 - 28{,}07 = \underline{-42{,}1°}$$

*Valor asintótico:* el módulo es 26,02 dB (tramo plano) y la fase

$$\angle G = -90 + 45\log\frac{100}{2{,}5} - 2\cdot 45\log\frac{100}{40} = -90 + 72{,}1 - 35{,}8 = -53{,}7°$$

El módulo difiere 0,26 dB y la fase 11,6° (la zona de transiciones solapadas es donde la fase asintótica es menos precisa).

**c)** En régimen permanente $y = 0{,}1\,|G|\sin(100t + \angle G)$:

$$\hat{Y} = 0{,}1\cdot 19{,}40 = 1{,}94 \qquad y = \underline{1{,}94\sin(100\,t - 42{,}1°)}$$

Con el valor asintótico se habría obtenido $2{,}0\sin(100t - 53{,}7°)$.

**d)** *Asintótica:* tras $\omega = 400$ cae 40 dB/dec desde 26,02 dB, luego cruza 0 dB cuando

$$40 \log \frac{\omega_c}{400} = 26{,}02$$
$$\frac{\omega_c}{400} = 10^{26{,}02/40} = \sqrt{20}$$
$$\omega_c = 400\sqrt{20} = \boxed{1789\,\text{rad/s}}$$

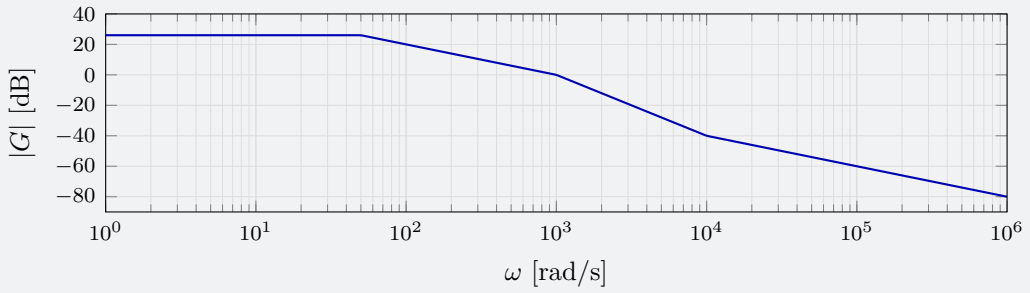
*Real:* resolviendo $|G(j\omega)| = 1$ numéricamente,

$$\omega_c = \boxed{1744\,\text{rad/s}}$$

El doble polo real en 400 baja la curva 6 dB en el codo, así que cruza antes.

**F. Identificar $G(s)$ desde un Bode (0,75 p)**

La figura muestra el Bode asintótico de módulo de un sistema estable de fase mínima.




a) Obtener $G(s)$ en forma normalizada.

b) Dibujar la fase asintótica e indicar su valor en $\omega = 1000\,\text{rad/s}$.

c) Calcular el módulo y la fase *exactos* en $\omega = 1000\,\text{rad/s}$.

**Resolución.**

**a)** Lectura de la gráfica, tramo por tramo:

- Nivel plano inicial $= 26\,\text{dB} \Rightarrow K = 10^{26/20} \approx 20$ (el nivel exacto de la figura es $20 \log 20 = 26{,}02\,\text{dB}$).
- En $\omega = 50$ la pendiente pasa a $-20$ dB/dec $\Rightarrow$ polo en 50.
- En $\omega = 1000$ llega a $-40$ dB/dec $\Rightarrow$ segundo polo en 1000 (el nivel en 1000 es $26{,}02 - 20 \log 20 = 0$ dB: coherente).
- En $\omega = 10^4$ la pendiente vuelve a $-20$ dB/dec $\Rightarrow$ un cero en $10^4$ (nivel $-40$ dB).

Como es de fase mínima, no hay ceros en el semiplano derecho:

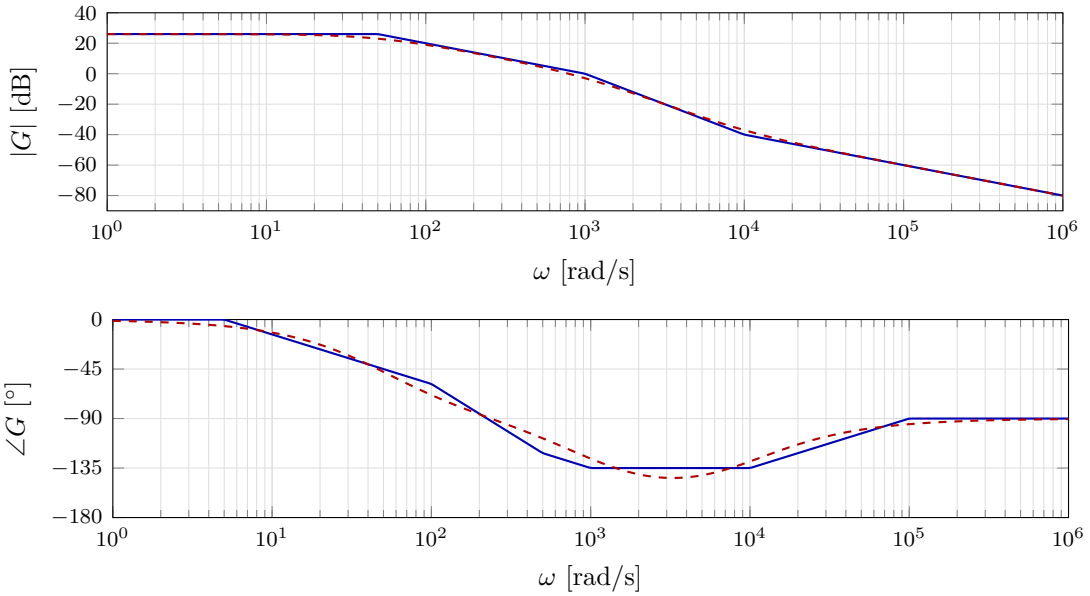
$$G(s) = \boxed{\frac{20\,(1 + s/10^4)}{(1 + s/50)(1 + s/1000)}}$$

**b)** Fase asintótica, contribución de cada término:

- Polo 50: $-45°$/dec entre 5 y 500 ($-90°$).
- Polo 1000: $-45°$/dec entre 100 y $10^4$.
- Cero $10^4$: $+45°$/dec entre 1000 y $10^5$.

En $\omega = 1000$ el primer polo ya aporta $-90°$; el segundo, en su codo, $-45°$; el cero comienza justo en 1000 ($0°$):

$$\angle G(j1000) = -90° - 45° + 0° = \boxed{-135°}$$




**c)** *Valor exacto* en $\omega = 1000$:

$$|G| = \frac{20\sqrt{1+0{,}1^2}}{\sqrt{1+20^2}\,\sqrt{1+1^2}} = \frac{20 \cdot 1{,}005}{20{,}025 \cdot 1{,}414} = 0{,}7097$$

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \log 0{,}7097 = \boxed{-2{,}98\,\text{dB}}$$

$$\angle G = \arctan 0{,}1 - \arctan 20 - \arctan 1 = 5{,}71 - 87{,}14 - 45 = \boxed{-126{,}4°}$$

Frente a las asíntotas (0 dB y $-135°$) hay el $-3$ dB habitual de un codo de polo y $+8{,}6°$ de diferencia de fase.

**G. Impedancias RLC por el método gráfico (1,5 p)**

Con $L = 4{,}7\,\text{mH}$ y $C = 2{,}2\,\mu\text{F}$:

a) Serie $R + L + C$ con $R = 500\,\Omega$: $R_0$, $f_0$, frecuencias de corte y Bode asintótico de $|Z|$ (dB$\Omega$) y de la fase. Corriente con $v_e = 20\sin(300\,t)$ V.

b) Serie con $R = 4{,}7\,\Omega$: profundidad de la muesca en dB, factor $Q$ y corriente de pico en $\omega_0$ con $v_e = 20\sin\omega t$ V.

c) Paralelo $R \parallel L \parallel C$ con $R = 3{,}3\,\Omega$: frecuencias de corte y Bode asintótico de $|Z|$.

d) $(R+sL) \parallel C$ con $R = 100\,\Omega$: Bode asintótico de $|Z|$ y fase, y valor real en $\omega = 1/RC$.

**Resolución.**

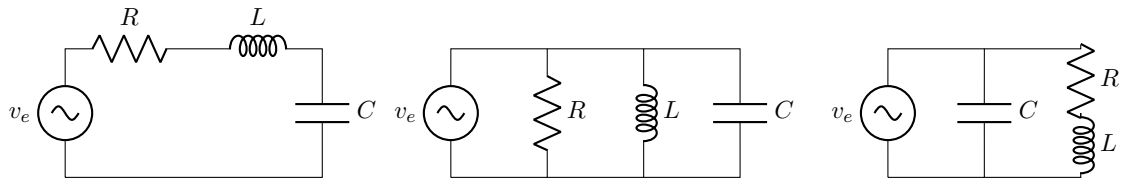
**Datos comunes:**

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4{,}7\cdot 10^{-3}}{2{,}2\cdot 10^{-6}}}$$

$$= \boxed{46{,}22\,\Omega} = 33{,}3\,\text{dB}\Omega$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 9834\,\text{rad/s} \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \boxed{1565\,\text{Hz}}$$

Se cumple $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = R_0$.




(a–b: serie; c: paralelo; d: $(R + sL) \parallel C$)

**a)** $R = 500\,\Omega > R_0$, con $Q = R_0/R = 0{,}092$ (dos cortes distintos):

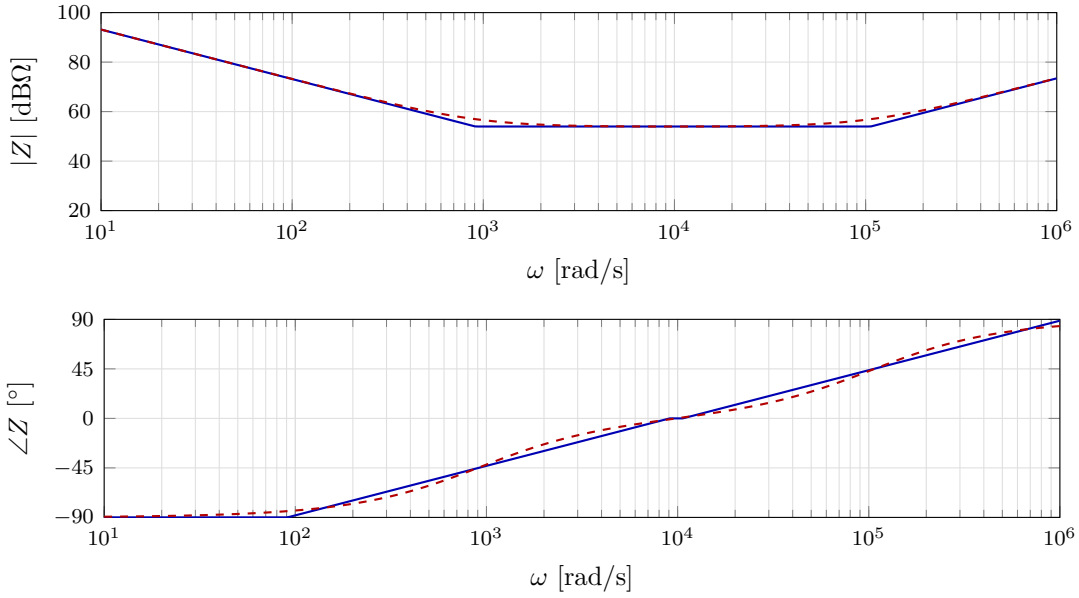
$$\omega_1 = \frac{1}{RC} = \boxed{909\,\text{rad/s}} \qquad (144{,}7\,\text{Hz})$$

$$\omega_2 = \frac{R}{L} = \boxed{1{,}064\cdot 10^5\,\text{rad/s}} \qquad (16{,}9\,\text{kHz})$$

Asíntotas de $|Z| = \max(R, \omega L, 1/\omega C)$:

- $1/\omega C$ ($-20$ dB/dec) hasta $\omega_1$.
- Plano a $R = 54{,}0\,\text{dB}\Omega$ entre $\omega_1$ y $\omega_2$.
- $\omega L$ ($+20$ dB/dec) a partir de $\omega_2$.

Fase: $-90°$ (capacitivo), sube $45°$/dec alrededor de $\omega_1$ hasta $0°$, y alrededor de $\omega_2$ hasta $+90°$.




Con $\omega = 300$ rad/s, *valor exacto*:

$$Z = 500 + j(1{,}41 - 1515)$$
$$|Z| = 1594\,\Omega \qquad (64{,}05\,\text{dB}\Omega)$$
$$\angle Z = -71{,}7^\circ$$

$$i = \frac{20}{1594}\sin(300t + 71{,}7^\circ) = \boxed{12{,}55\sin(300\,t + 71{,}7^\circ)\ \text{mA}}$$

*Asintótico:* $|Z| \approx 1/\omega C = 1515\,\Omega \to 13{,}2\,\text{mA}$ y fase $-66{,}7^\circ$ sobre la rampa de $-90^\circ$ a $0^\circ$ ($+23{,}3^\circ$ desde $-90^\circ$).

**b)** $R = 4{,}7\,\Omega < R_0$:

$$Q = \frac{R_0}{R} = \boxed{9{,}83}$$

La asíntota es $1/\omega C$ hasta $\omega_0$ y $\omega L$ después (cruce en $R_0 = 33{,}3\,\text{dB}\Omega$); el valor real en $\omega_0$ es $R = 13{,}44\,\text{dB}\Omega$, es decir, la muesca tiene profundidad

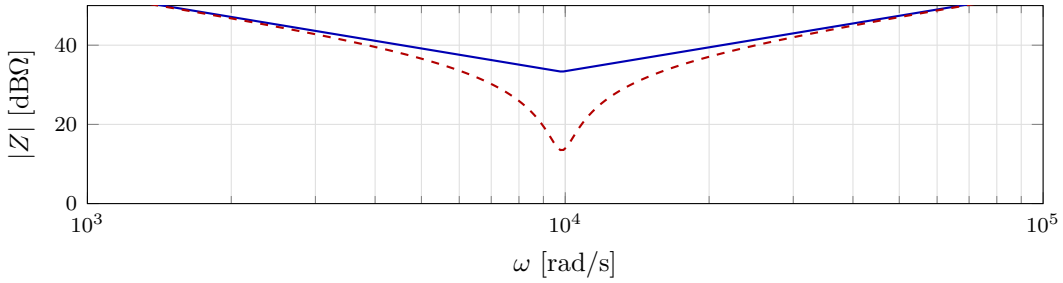
$$20\log Q = \boxed{19{,}85\,\text{dB}} \quad \text{respecto del vértice.}$$

La fase asintótica pasa bruscamente de $-90^\circ$ a $+90^\circ$ en $\omega_0$ (la real lo hace en una banda $\approx \omega_0/Q$ de ancho).

Corriente en $\omega_0$: $Z = R$ puro, en fase con $v_e$.

$$\hat{I} = \frac{20}{4{,}7} = \boxed{4{,}26\,\text{A}}$$

Obsérvese que las tensiones en $L$ y $C$ valen $Q \cdot 20 = 197\,\text{V}$ de pico, casi diez veces la de entrada.




**c)** Paralelo, $R = 3{,}3\,\Omega < R_0$ ($Q = R/R_0 = 0{,}071$), con $|Z| \approx \min(R, \omega L, 1/\omega C)$. Cortes:

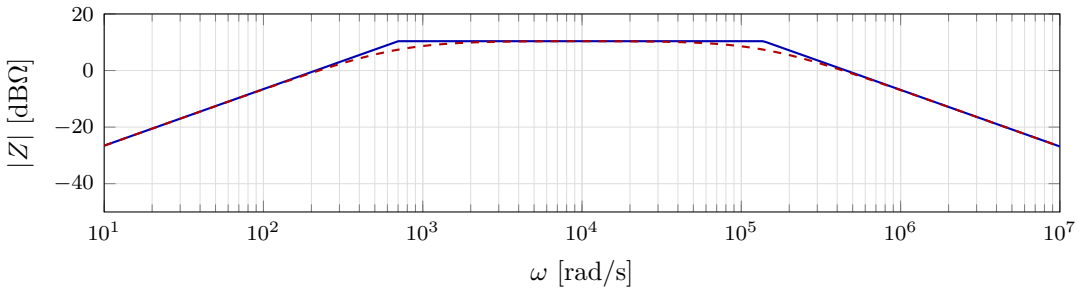
$$\omega_1 = \frac{R}{L} = \underline{\boxed{702\,\text{rad/s}}} \qquad (111{,}7\,\text{Hz})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{RC} = \underline{\boxed{1{,}377 \cdot 10^5\,\text{rad/s}}} \qquad (21{,}9\,\text{kHz})$$

Asíntotas:

- Por debajo de $\omega_1$ domina $\omega L$ (+20 dB/dec).
- Entre ambos, $|Z| = R = 10{,}37\,\text{dB}\Omega$.
- Por encima de $\omega_2$, $1/\omega C$ (−20 dB/dec).

Al ser $Q \ll 1$ el paralelo es casi puramente la resistencia en torno a $\omega_0$ ($|Z(\omega_0)| = R$).




**d)** $(R + sL) \parallel C$ con $R = 100\,\Omega$:

$$Z = \frac{R + sL}{1 + sRC + s^2LC}$$

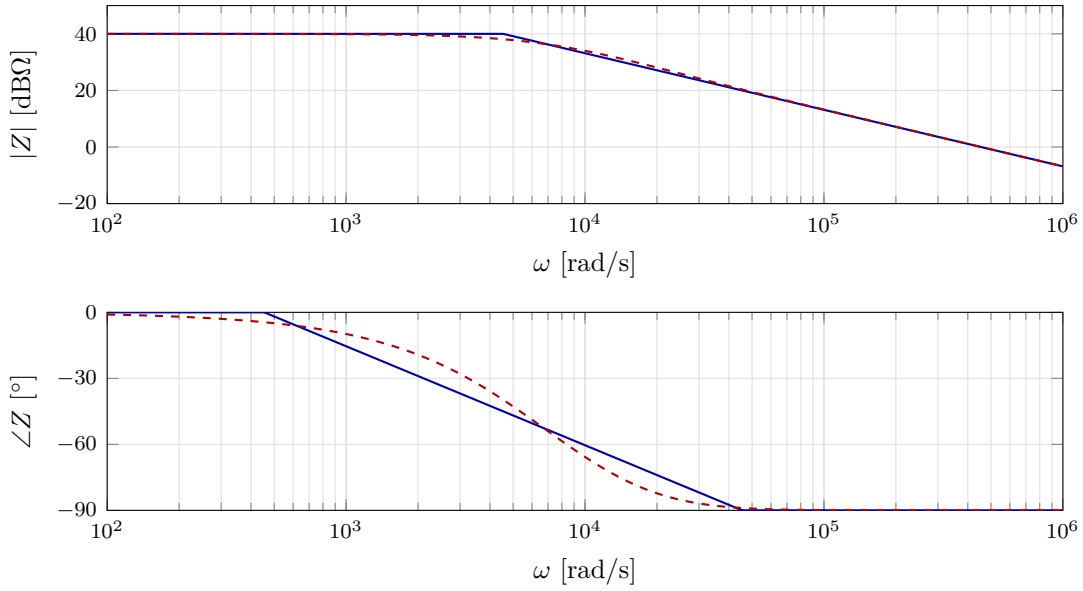
Como $R_0 = 46{,}2 < R$, resulta $Q = R_0/R = 0{,}46$ (polos reales). Asintóticamente

$$|Z| = \min\big[\max(R, \omega L),\ 1/\omega C\big]$$

es decir, la rama $R + sL$ vale $R = 40\,\text{dB}\Omega$ y el condensador la corta en

$$\omega = \frac{1}{RC} = 4545\,\text{rad/s}$$

a partir de ahí −20 dB/dec. El cero $R/L = 21\,277$ rad/s cae ya en la zona dominada por $C$ y cancela el segundo polo asintótico ($R/L$ también). Fase asintótica: $0° \to -90°$, con la rampa $-45°$/dec centrada en $\omega = 1/RC$.




*Valor real* en $\omega = 1/RC = 4545\,\text{rad/s}$:

$$Z = \frac{100 + j21{,}4}{1 - 0{,}2136 + j\,1} \qquad |Z| = \boxed{80{,}4\,\Omega} = 38{,}1\,\text{dB}\Omega$$

$$\angle Z = \boxed{-39{,}8^\circ}$$

Frente a la asintótica (40 dBΩ y −45°), el codo cae sólo 1,9 dB y no 3 dB, porque los dos polos reales, en 6581 y 14 696 rad/s, están más próximos entre sí que las asíntotas.

## 3 Convertidores, filtros EMI y control (H–J)

### H. Regulador lineal frente a reductor (1,0 p)

Una carga de 5 V y 1,5 A se alimenta desde una batería de 9 V a 15 V. (a) Rendimiento y pérdidas máximas con regulador lineal, y rango de $D$ de un reductor ideal. (b) El reductor usa $f_{sw} = 250\,\text{kHz}$, $L = 33\,\mu\text{H}$, $C = 68\,\mu\text{F}$ con la carga resistiva en paralelo con $C$: $f_0$, $Q$ y atenuación a $f_{sw}$. (c) $\tilde{v}_{out}/\tilde{d}$ a $U_{BAT} = 15\,\text{V}$: ganancia en continua y pico (dB). (d) $L$ mínima con el mismo $C$ para atenuar 60 dB la frecuencia de conmutación.

**Resolución.**

**a)** *Regulador lineal:* la corriente de salida es la de entrada, luego

$$\eta = \frac{U_o I_o}{U_{BAT} I_o} = \frac{5}{U_{BAT}}$$

Va del 55,6 % a 9 V hasta el mínimo a 15 V:

$$\eta_{15\,\text{V}} = \boxed{33{,}3\,\%}$$

Las pérdidas $(U_{BAT} - U_o)I_o$ son máximas en 15 V:

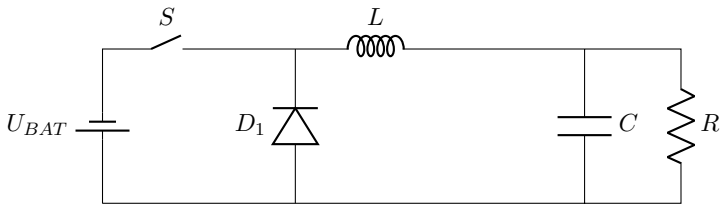
$$P_{perd} = (15 - 5) \cdot 1{,}5 = \boxed{15\,\text{W}}$$

Es el doble de la potencia útil (7,5 W).

*Reductor ideal:* el ciclo de trabajo cubre el rango

$$D = \frac{U_o}{U_{BAT}}$$
$$\in \left[\frac{5}{15}, \frac{5}{9}\right] = \boxed{[0{,}333;\ 0{,}556]}$$

con rendimiento ideal del 100 %.




**b)** Resistencia de carga:

$$R = \frac{5}{1{,}5} = 3{,}33\,\Omega$$

El filtro $LC$ con la carga en paralelo con $C$ es un segundo orden:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 21\,110\,\text{rad/s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \boxed{3{,}36\,\text{kHz}}$$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 3{,}333\sqrt{\frac{68}{33}} = \boxed{4{,}78}$$

Esto supone un pico de 13,6 dB, con $R_0 = \sqrt{L/C} = 0{,}70\,\Omega$.

Atenuación a $f_{sw}$:

$$\left(\frac{f_0}{f_{sw}}\right)^2 = \left(\frac{3{,}36}{250}\right)^2 = 1{,}81 \cdot 10^{-4}$$

$$A = 20\log\left(1{,}81 \cdot 10^{-4}\right) = \boxed{-74{,}9\,\text{dB}}$$

La asintótica y la exacta coinciden a 0,002 dB, porque $f_{sw} \gg f_0$.

**c)** La fuente de tensión conmutada $\tilde{v}_I = U_{BAT}\tilde{d}$ pasa por el mismo filtro:

$$\frac{\tilde{v}_{out}}{\tilde{d}} = \frac{U_{BAT}}{1 + \dfrac{s}{Q\omega_0} + \dfrac{s^2}{\omega_0^2}}$$

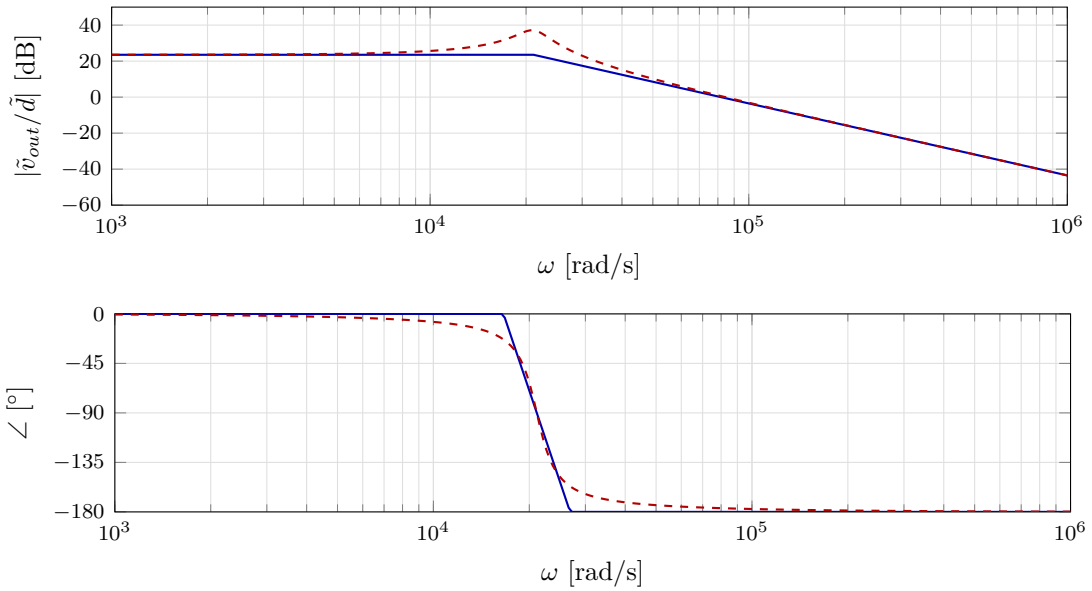
Ganancia en continua:

$$G_{DC} = 20\log 15 = \boxed{23{,}5\,\text{dB}}$$

Pico en $\omega_0$ (asintótico):

$$\begin{aligned} G_{pico} &= 20\log(15 \cdot 4{,}78) \\ &= \boxed{37{,}1\,\text{dB}} \qquad (71{,}8\ \text{V por unidad de } \tilde{d}) \end{aligned}$$

El máximo exacto es 37,17 dB, desplazado ligeramente a 20,9 krad/s. La fase asintótica pasa de 0° a −180° en la banda $\omega_0/a \ldots a\omega_0$ con $a = 10^{1/(2Q)} = 1{,}27$.




**d)** Se exige $(f_0/f_{sw})^2 \leq 10^{-3}$:

$$f_0 \leq 250 \cdot 10^{-3/2} = 7{,}91\,\text{kHz}$$

Con $C = 68\,\mu\text{F}$:

$$L_{min} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \boxed{5{,}96\,\mu\text{H}}$$

La atenuación exacta resulta $-59{,}99\,\text{dB}$.

Con esa inductancia, el factor de calidad y el rizado de corriente en $L$ pasan a:

$$Q = 3{,}33\sqrt{\frac{68}{5{,}96}} = 11{,}3$$

$$\Delta i_L = \frac{(U_{BAT} - U_o)D}{f_{sw}L} = 2{,}24\,\text{A pico a pico}$$

Con $33\,\mu\text{H}$ el rizado era $0{,}40\,\text{A}$. Además $i_{L,min} = 1{,}5 - 1{,}12 = 0{,}38\,\text{A} > 0$: sigue en conducción continua, pero la bobina pasa a trabajar con corrientes pico mucho mayores.

**I. Filtro EMI y estabilidad (1,0 p)**

Un convertidor de $60\,\text{W}$ a potencia constante se alimenta con $V_{in} \geq 20\,\text{V}$ a través de un filtro $L_f = 22\,\mu\text{H}$, $C_f = 47\,\mu\text{F}$. La bobina tiene una resistencia serie $r_L = 30\,\text{m}\Omega$ (se desprecia en el apartado a). Genera un armónico de corriente de $30\,\text{mA}$ a $200\,\text{kHz}$.

a) $f_0$, $R_0$ y atenuación a $200\,\text{kHz}$. Nivel en dB$\mu$V sobre los $50\,\Omega$ de la LISN y comparación con el límite cuasi-pico de clase B a esa frecuencia.

b) $Z_{in}$ del convertidor en el peor caso y estabilidad (Middlebrook, margen de 6 dB) sin amortiguar (con $r_L$).

c) Se añade $R_f$–$C_b$ en paralelo con $C_f$ con $C_b = 4C_f$ y $R_f = R_0$: pico de $|Z_{out}|$ (con $r_L$) y margen.

d) Clasificar como modo común o diferencial: (i) rizado de la corriente de entrada del convertidor; (ii) corriente por la capacidad parásita drenador–disipador.

**Resolución.**

**a)** Frecuencia de resonancia e impedancia característica:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{22\cdot 10^{-6}\cdot 47\cdot 10^{-6}}} = \underline{4{,}95\,\text{kHz}}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{22}{47}} = \underline{0{,}684\,\Omega}$$

Atenuación a $200\,\text{kHz}$:

$$\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 = \left(\frac{4{,}95}{200}\right)^2 = 6{,}13\cdot 10^{-4}$$

$$A = 20\log\left(6{,}13\cdot 10^{-4}\right) = \underline{-64{,}3\,\text{dB}}$$

La atenuación exacta es $-64{,}25$ dB.

Sin filtro, la corriente de 30 mA en los 50 Ω de la LISN da 1,5 V = 123,5 dBµV. Con filtro:

$$U_{LISN} = 123{,}5 - 64{,}3 = \boxed{59{,}3\,\text{dB}\mu\text{V}}$$

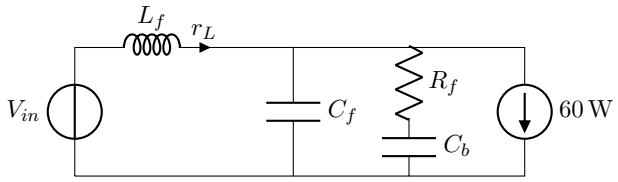
Límite QP clase B a 200 kHz:

$$L_{QP} = 66 - 10\,\frac{\log(200/150)}{\log(500/150)} = 63{,}6\,\text{dB}\mu\text{V}$$

Margen respecto al límite:

$$M = 63{,}6 - 59{,}3 = \boxed{4{,}3\,\text{dB}}$$

Luego *cumple*. (Con el detector de promedio, 53,6 dBµV, no se cumpliría: faltarían 5,7 dB; aquí sólo se pide el límite QP.)




**b)** El convertidor a potencia constante tiene $\Delta v/\Delta i = -v^2/P$, es decir, resistencia incremental negativa de módulo $V_{in}^2/P$, mínimo en el peor caso $V_{in} = 20$ V:

$$|Z_{in}| = \frac{V_{in}^2}{P} = \frac{400}{60} = \boxed{6{,}67\,\Omega} \qquad (16{,}5\,\text{dB}\Omega)$$

Middlebrook con 6 dB de margen:

$$|Z_{out}|_{max} \leq \frac{|Z_{in}|}{2} = 3{,}33\,\Omega \qquad (10{,}5\,\text{dB}\Omega)$$

Sin amortiguar, con $r_L = 30\,\text{m}\Omega$:

$$Q = \frac{R_0}{r_L} = 22{,}8$$

$$|Z_{out}|_{pico} \approx \frac{R_0^2}{r_L} = 15{,}6\,\Omega \qquad (23{,}9\,\text{dB}\Omega)$$

El valor exacto es 15,62 Ω en 4,95 kHz.

Margen de estabilidad:

$$M = 20\log\frac{6{,}67}{15{,}6} = \boxed{-7{,}4\,\text{dB}}$$

Resulta **inestable**: el pico supera a $|Z_{in}|$ y las curvas se cortan.

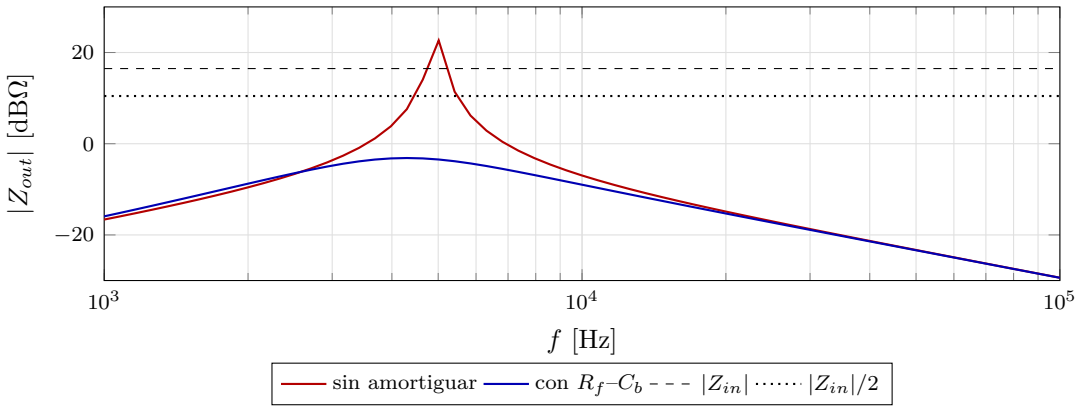
**c)** Rama de amortiguamiento con $C_b = 4C_f = 188\,\mu\text{F}$ y $R_f = R_0 = 0{,}684\,\Omega$. El pico de $|Z_{out}|$ cae a

$$|Z_{out}|_{pico} = \boxed{0{,}70\,\Omega} \qquad (-3{,}1\,\text{dB}\Omega,\ \text{hacia } 4{,}3\,\text{kHz})$$

El margen pasa a:

$$M = 20\log\frac{6{,}67}{0{,}70} = \boxed{19{,}6\,\text{dB}} \ \geq 6\ \text{dB}$$

Estable con holgura. (El valor óptimo de Erickson, $R_f = 0{,}612R_0 = 0{,}42\,\Omega$ para $n = 4$, daría un pico de $0{,}54\,\Omega$ y $21{,}9\,\text{dB}$.)




**d)** (i) El rizado de la corriente de entrada del convertidor circula por el cable de ida y vuelta (ida por un conductor, retorno por el otro): es de **modo diferencial**.

(ii) La corriente por la capacidad parásita drenador–disipador sale por la rama de tierra y vuelve por ella (ambos conductores a la vez, retorno por tierra): **modo común**.

Se filtran con elementos distintos ($L_f$–$C_f$ entre líneas, y choque de modo común más condensadores a tierra).

**J. Lazo de control (1,0 p)**

Una planta $G(s) = \dfrac{10}{1 + s/2000}$ se controla con $R(s) = \dfrac{150}{s}$ en realimentación unitaria.

a) Ganancia de lazo $L(s)$, ancho de banda $\omega_c$ y margen de fase (asintótico y exacto). ¿Margen de ganancia?

b) Error relativo $|e/r|$ ante referencias senoidales de 100 y 1000 rad/s.

c) Atenuación ($|T|$ en dB) de un ruido de medida a 20 000 rad/s.

d) Valor $R(s) = K/s$ que da $M_f = 45°$ y $\omega_c$ resultante.

**Resolución.**

**a)** Función de transferencia de lazo (integrador con polo en 2000 rad/s):

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1500}{s\,(1 + s/2000)}$$

*Asintótico:* antes del polo $|L| = 1500/\omega$, así que cruza 0 dB en

$$\omega_c = \underline{1500\,\text{rad/s}} \quad \text{(por debajo de 2000, correcto)}$$

Fase asintótica y margen de fase:

$$\angle L(\omega_c) = -90° - 45\log\frac{1500}{200} = -129{,}4°$$

$$M_f = 180° - 129{,}4° = \underline{50{,}6°}$$

*Exacto:* imponiendo $|L| = 1$,

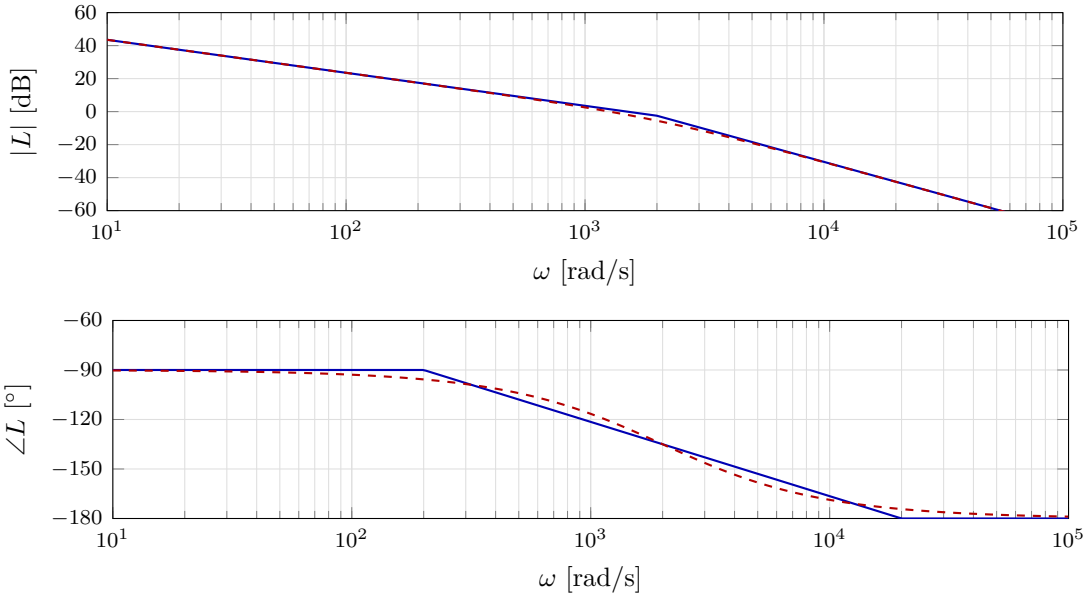
$$\frac{\omega^4}{4\cdot 10^6} + \omega^2 - 1500^2 = 0$$

$$\omega_c = \underline{1267\,\text{rad/s}}$$

$$M_f = 180 - 90 - \arctan\frac{1267}{2000} = 90 - 32{,}4 = \underline{57{,}6°}$$

La fase tiende a $-180°$ pero no lo alcanza a ninguna frecuencia finita:

$$\underline{M_G = \infty}$$




**b)** Función de sensibilidad $e/r = S = 1/(1+L)$. En $\omega = 100$:

$$L = \frac{1500}{j100\,(1+j0{,}05)} \qquad |L| = 14{,}98$$

$$|e/r| = \underline{0{,}0668} \qquad (6{,}7\,\%)$$

La aproximación $1/|L| = 0{,}0667$ es válida lejos de $\omega_c$.

En $\omega = 1000$:

$$L = -0{,}6 - j1{,}2$$

$$1 + L = 0{,}4 - j1{,}2$$

$$|e/r| = \underline{0{,}791} \qquad (79\,\%)$$

Cerca de $\omega_c$ el lazo apenas reduce el error, y $1/|L| = 0{,}745$ ya no aproxima bien.

**c)** Para $\omega \gg \omega_c$, $|T| \approx |L|$:

$$|L(j20\,000)| = \frac{1500}{20000 \cdot \sqrt{1+100}} = 7{,}46 \cdot 10^{-3}$$

$$|T| = 7{,}52 \cdot 10^{-3} = \underline{-42{,}5\,\text{dB}}$$

Asintótico: $-22{,}5 - 20 = -42{,}5\,\text{dB}$.

**d)** Con ganancia $K$ libre:

$$L = \frac{10K}{s(1+s/2000)}$$

$M_f = 45°$ exige $\angle L(\omega_c) = -135°$:

$$\arctan \frac{\omega_c}{2000} = 45°$$

$$\omega_c = \boxed{2000\,\text{rad/s}}$$

Con $|L(j\omega_c)| = 1$:

$$\frac{10K}{2000\sqrt{2}} = 1$$

$$K = \boxed{282{,}8}$$

Es decir $R(s) = 282{,}8/s$ (con módulo asintótico saldría $K = 200$, un 29 % menos: el codo vale $-3$ dB exactos). Respecto del apartado (a) se gana ancho de banda (2000 frente a 1267 rad/s) a cambio de menos margen de fase (45° frente a 57,6°).

